A teoria dos operadores
que formam termos ligando
variáveis de fórmulas
tem sido muito desenvolvida
e encontrado aplicações diversas.
O caráter não trivial das técnicas
para se estudar o símbolo de Hilbert
torna patente o significado profundo
das noções da lógica hodierna.
Achamos então que uma introdução
à lógica fundada no símbolo de Hilbert
associado à lógica elementar
afigura-se conveniente.

ISBN 85-7025-168-8

Rejane Carrion / Newton C. A. da Costa

Introdução à lógica elementar

# introdução à lógica elementar

com o símbolo de Hilbert

Rejane Carrion
Newton C. A. da Costa

Nova Série
Livro-Texto
3.

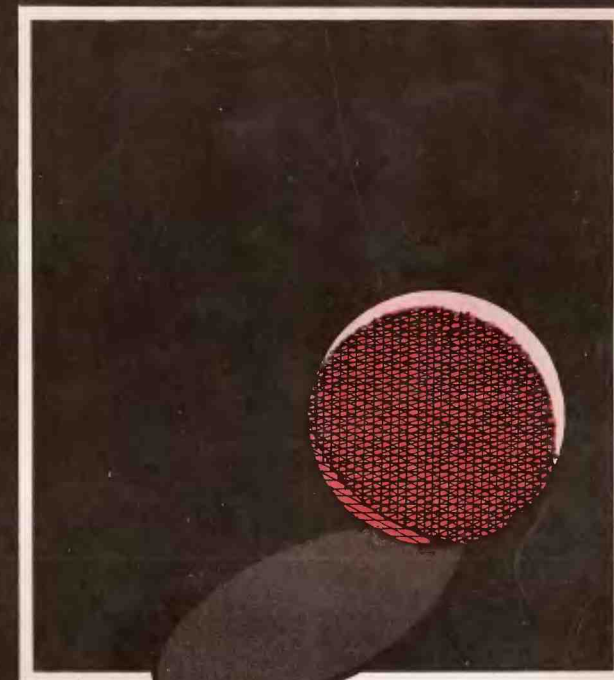
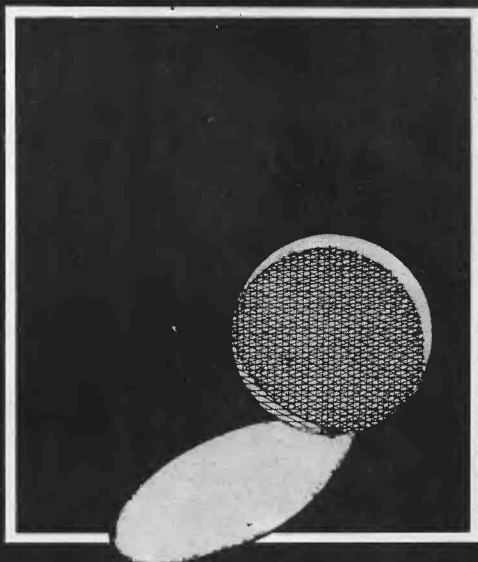
# introdução à lógica elementar

EDUNI-SUL
ASSOCIAÇÃO DAS EDITORAS
UNIVERSITÁRIAS DA REGIÃO SUL

# introdução à lógica elementar

com o símbolo de Hilbert

Rejane Carrion
Newton C. A. da Costa

Nova Série
Livro-Texto
3.

Editora
da Universidade
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

1ª edição: 1988



Capa: Carla Luzzatto
Administração: Maria Beatriz A.B. Galarraga
Editoração: Geraldo F. Huff
Composição e montagem: Centro de Lógica, Epistemologia
e História da Ciência da UNICAMP

**Rejane Carrion**
Professora no Departamento de Filosofia da UFRGS, desde 1967. Mestrado em Filosofia na Universidade de Paris/Sorbone, em 1970. Concluindo o doutorado em Filosofia na USP.

**Newton C.A. da Costa**
Criador da lógica paraconsciente. Ensinou e pronunciou conferências em universidades da América, Europa e Australásia. Trabalhos publicados em revistas internacionais de Lógica e Filosofia da Ciência. Professor de Lógica no Departamento de Filosofia da Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas da USP.

---

C318i Carrion, Rejane
Introdução à lógica elementar
(com o símbolo de Hilbert) / [por]
Rejane Carrion e Newton C.A. da Costa.
– Porto Alegre : Ed. da Universidade/
UFRGS, MEC/SESu/PROEDI, 1988
66p.

1. Lógica elementar. I. Costa,
Newton C.A. da. II. Título.

---

CDU 161/162

Catalogação na fonte da Biblioteca Central da UFRGS

ISBN 85-7025-168-8

## SUMÁRIO

# PREFÁCIO

*Este livro contém a matéria de um curso de* "Introdução à Lógica" *ministrado pelo Professor N. C. A. da Costa, na Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Das notas de aula redigidas pela Professora Rejane Carrion, e da experiência de sua utilização como material pedagógico com diversas turmas de graduação e de pós-graduação, resultou o presente trabalho. A* Introdução *foi publicada anteriormente pelo Professor da Costa, sob forma de artigos, no* Folhetim *do jornal* Folha de São Paulo.

*Quando o equilíbrio que se procurou manter entre as exigências de rigor formal impostas pelo tema e o caráter coloquial da exposição não pode ser alcançado, ao Prof. da Costa devem-se os momentos em que prevaleceram as primeiras, e à Profa. Rejane Carrion as concessões devidas ao segundo.*

*Porto Alegre, março de 1987.*

*Os Autores*

# INTRODUÇÃO

Nesta Introdução, tecemos algumas considerações de caráter geral sobre a situação atual da lógica.

## 1 As lógicas não-clássicas

A lógica trata, entre outras coisas, das inferências válidas, ou seja, das inferências cujas conclusões têm que ser verdadeiras, caso as premissas o sejam.

Tanto as premissas como as conclusões de uma inferência devem estar formuladas em uma linguagem mais ou menos bem estruturada, para que ela seja objeto de análise lógica apropriada. Com o intuito de tornar rigorosas suas investigações, os lógicos edificaram linguagens artificiais convenientes. As inferências são "traduzidas" nessas linguagens, ainda que pelo menos em princípio, para se estabelecer se elas pertencem à categoria dos argumentos válidos ou à dos argumentos inválidos.

Tais linguagens possuem pelo menos duas dimensões relevantes para a lógica: a dimensão sintática e a dimensão semântica.

As linguagens em geral são compostas de símbolos e sinais que se acham sujeitos a regras de combinação que independem do que esses símbolos e sinais signifiquem. Por exemplo, certas configurações simbólicas incluem-se entre as *fórmulas* e outras entre os *termos*, e isto pode ser caracterizado de modo puramente combinatório e formal, sem se necessitar recorrer aos significados dos símbolos, mas com base exclusivamente nas configurações dos arranjos simbólicos. A dimensão combinatória de uma linguagem, encarada como puro jogo formal, sem significado, denominamos de *dimensão sintática*. E a estrutura sintática de uma linguagem determina sua sintaxe lógica.

Porém, as linguagens não são feitas apenas para dar origem a puras estruturas sintáticas. Seus símbolos e expressões têm em geral significado, referindo-se a objetos extra-lingüísticos. Daí a *dimensão semântica* das linguagens, que leva em consideração, além das estruturas sintáticas, os objetos aos quais as configurações simbólicas se referem e os significados das mesmas.

Assim, pois, as linguagens se encontram submetidas não apenas a regras sintáticas, mas também a regras semânticas. O enorme interesse das dimensões sintática e semântica para a lógica foi posto em relevo especialmente por R. Carnap e A. Tarski, por volta de 1930.

Mais ou menos até princípios deste século, havia uma única lógica (pura, formal ou teórica). Mas no decurso dos últimos oitenta anos, foram

criadas outras lógicas, de modo que a lógica inicialmente considerada, cujas origens remontam a Aristóteles, mas cujo sistematizador mais importante foi G. Frege (nos três decênios derradeiros do século passado), precisou ser chamada de *clássica* ou *tradicional*. Pode-se dizer que a lógica clássica adquiriu sua forma quase definitiva na obra monumental de A. N. Whitehead e Bertrand Russell, intitulada *"Principia Mathematica"*, em três volumes, publicados respectivamente em 1910, 1912 e 1913.

Uma das maiores revoluções culturais de nossa época foi a edificação das lógicas não-clássicas, particularmente das lógicas não-clássicas batizadas de rivais da clássica ou heterodoxas. Essa revolução é similar à revolução provocada pela descoberta das geometrias não-euclidianas, no século passado. Porém, até o momento, não se explorou a fundo, do ponto de vista filosófico, o significado da eclosão das lógicas heterodoxas.

A lógica clássica consiste no que se costuma denominar cálculo de predicados de primeira ordem, bem como de algumas de suas extensões, como certos sistemas de teoria dos conjuntos e determinados cálculos de predicados de ordem superior. Essencialmente, a lógica clássica versa, em sua parte dita elementar, com base em certas posições sintáticas e semânticas subjacentes, sobre os chamados conectivos lógicos (conjunção, disjunção, negação, implicação, equivalência, . . . ), sobre os quantificadores ("todos", "todo", "algum", "alguns", "algumas", . . . ) e sobre o predicado de igualdade. Em sua porção não elementar, a lógica tradicional investiga a noção de pertinência (na acepção em que, por exemplo, afirmamos a sentença: "Bertrand Russell pertence ao conjunto dos filósofos") e outras noções alternativas.

A lógica clássica, em seu estado atual, é tão poderosa, que encerra a velha silogística aristotélica, convenientemente reformulada, como caso deveras especial e quase sem importância. Por outro lado, toda a matemática tradicional, em certo sentido preciso, reduz-se à lógica clássica. (Todos os conceitos matemáticos tradicionais são definíveis em termos da idéia de conjunto e, portanto, definíveis a partir da lógica).

A lógica clássica caracteriza-se por determinados princípios básicos, de natureza sintática e semântica. Quando semelhantes princípios são derrogados, nascem as lógicas não-clássicas.

As lógicas não clássicas classificam-se em duas categorias: as complementares da lógica clássica e as rivais da lógica clássica.

Há várias lógicas que podem ser entendidas como ampliando e complementando o escopo da lógica clássica. Elas se individualizam por não colocarem em xeque as leis centrais daquela, mas por alargarem o âmbito de suas aplicações: tão somente modificam o aparato lingüístico sob o ponto de vista sintático, adaptando a contraparte semântica de maneira absoluta-

mente não essencial, sem infringir os princípios nucleares clássicos.

Por exemplo, podemos acrescentar à lógica tradicional operadores modais, isto é, operadores expressando os conceitos lógicos de necessidade, de possibilidade, de impossibilidade e de contingência; obtém-se, assim, a lógica modal usual, que, em sua forma hodierna, originou-se com C.I. Lewis, em princípios deste século. Também nada impede que se adicione à lógica clássica operadores deônticos, formalizando-se as idéias correspondentes às palavras "proibido", "permitido", "indiferente" e "obrigatório", dando nascimento à lógica deôntica, elaborada sobretudo por G.H. von Wright (1951). Introduzindo-se operadores temporais, por exemplo símbolos refletindo as flexões temporais dos verbos das linguagens naturais nas estruturas lógicas clássicas, constrói-se a lógica do tempo ou lógica cronológica, cultivada em nossos dias sobretudo por A.N. Prior, nos anos 60. Enfim, poderíamos suplementar a lógica clássica de várias outras maneiras, advindo numerosas lógicas não-clássicas, tais como a lógica epistêmica e a lógica dos imperativos, todas elas complementando a lógica clássica.

Como não podia deixar de ser, a lógica do tempo evidenciou-se de suma relevância para os fundamentos da física, descrevendo e analisando as estruturas formais de vários tipos de fluxo temporal *a priori* admissíveis: tempo discreto, tempo contínuo, tempo linearmente ordenado, tempo circular, etc. A lingüística também encontra na lógica cronológica uma ancila de inestimável valor. Porquanto, as linguagens naturais afiguram-se inseparáveis das flexões temporais, que inexistem na lógica clássica.

Todas as lógicas complementares da clássica mais conhecidas são deveras relevantes e motivaram questões variadas, especialmente problemas filosóficos. Nelas, repetimos, a sintaxe da lógica tradicional é modificada, pois as linguagens basilares subjascentes à lógica clássica são expandidas pela adjunção de novos símbolos; isto acarreta, evidentemente, alguns retoques semânticos, dado que se torna preciso enquadrar a dimensão semântica às novas sintaxes. Embora as mudanças sejam, sob certos aspectos, marginais, os problemas semânticos e filosóficos decorrentes se mostram profundos e têm incentivado pesquisas fecundas, envolvendo temas como: a natureza do essencialismo, em lógica modal; a possibilidade de uma lógica jurídica, em que os operadores deônticos reflitam traços reais da atividade do jurisconsulto; as relações entre espaço e tempo nos fundamentos da física, em particular em teorias físicas da espécie da teoria geral da relatividade e da mecânica quântica.

Não obstante, as lógicas complementares da clássica não alteram as leis nucleares da lógica clássica. Dito de outro modo, elas não questionam a validez universal da lógica em apreço. Desenvolvem-se as lógicas complementares da clássica permanecendo fiéis ao espírito desta última.

A situação muda inteiramente de figura no tocante às lógicas não-clássicas rivais da lógica tradicional. Elas foram propostas, ou podem ser tidas como tendo sido propostas, à guisa de rivais da clássica. São concebidas como novas lógicas destinadas a substituir a lógica clássica em alguns domínios do saber, ou em todos. A imprescindibilidade de tal substituição adviria de deficiências e de limitações inerentes à lógica tradicional, deficiências e limitações essas das mais variadas naturezas.

Existem diversas lógicas rivais da clássica, ou, como se habituou também chamar, lógicas heterodoxas. Vejamos alguns exemplos de lógicas dessa espécie.

Dentre as leis que vigem na lógica clássica, há três célebres e que se denominam: lei de identidade, lei da contradição (alguns preferem nomeá-la de lei da não-contradição) e lei do terceiro excluído. Essas leis possuem muitas formulações, nem sempre equivalentes entre si. Para nossos objetivos, adotaremos as seguintes versões: a) lei da identidade: todo objeto é idêntico a si mesmo; b) lei da contradição: dentre duas proposições contraditórias, isto é, uma das quais é a negação da outra, uma delas é falsa; c) lei do terceiro excluído: de duas proposições contraditórias, uma delas deve ser verdadeira.

Algumas das lógicas heterodoxas mais conhecidas e discutidas distinguem-se, precisamente, por derrogarem pelo menos uma das leis precedentes (que, em formulações as mais variadas, eram designadas pela expressão "leis fundamentais do pensamento", talvez porque se acreditasse que sem elas não poderia haver pensamento racional, pensamento logicamente concatenado). Todavia, as lógicas heterodoxas provaram que o pensamento lógico-racional pode se exercitar mesmo sem obedecer a essas leis fundamentais da razão, libertando essa faculdade do jugo duas vezes milenar de semelhantes leis, que pareciam absolutamente impossíveis de serem revogadas.

Há sistemas lógicos nos quais o princípio da identidade não é válido em geral, em parte porque se julga que a relação de identidade carece de significação para certos tipos de objetos. Como esse princípio também se denomina lei reflexiva da identidade, as lógicas em apreço podem ser batizadas de lógicas não-reflexivas. Por exemplo, E. Schrödinger insistiu em que a noção de identidade não possui sentido pleno para os elétrons e, em geral, para as partículas elementares. Não se trata de não se poder saber quando um elétron é idêntico ou diferente de outro: trata-se, isto sim, da circunstância de que não parece ter sentido exato afirmar-se que um elétron é idêntico a outro, ou que é distinto desse outro. Porém, o princípio de identidade mostra-se válido, entre limites, para os objetos macroscópicos. Logo, ele vige no mundo da física clássica, embora não reja o universo das

partículas elementares. Existem sistemas lógicos não-reflexivos extremamente fortes e que englobam a lógica tradicional a título de caso especial. É obvio que os sistemas não-reflexivos divergem basicamente da lógica tradicional, possuindo sintaxe e semânticas incomparáveis com as da lógica padrão.

Uma das dificuldades ligadas à semântica dos sistemas não-reflexivos refere-se aos recursos para se edificar uma semântica dessa natureza. Com efeito, na construção das semânticas mais comuns, lança-se mão da teoria clássica dos conjuntos, mas, no caso das lógicas não-reflexivas, isto não funciona. Porquanto, na teoria em apreço permanece verdadeira a lei da identidade.

As lógicas não-reflexivas não provam que Schröedinger tenha razão em suas concepções sobre as interconexões entre identidade e partículas elementares, embora tornem claro que sua posição não pode ser excluída apenas por motivos de índole lógica.

Há outras lógicas não-reflexivas que provieram de discussões e de problemas completamente diversos. Assim, determinados sistemas lógicos formalizam o operador de descrição (introduzido como símbolo primitivo), ou seja, o artigo definido , tal qual ele ocorre nas frases: "O atual rei do Brasil" e "O dobro de quatro é oito". Quando o artigo origina uma descrição semelhante a "O atual rei do Brasil", que realmente não descreve coisa alguma, é conveniente, por diversos motivos, inclusive razões de ordem técnica, que para essas descrições não se aplique a lei de identidade.

Derroga-se o princípio da contradição na maioria das lógicas chamadas de paraconsistentes. Para definirmos os sistemas paraconsistentes necessitamos de alguns esclarecimentos preliminares.

Uma teoria dedutiva T diz-se inconsistente se entre os seus teoremas há pelo menos dois, um dos quais é a negação do outro; em caso contrário, T denomina-se consistente. A teoria T chama-se trivial (ou supercompleta) se todas as proposições formuláveis em sua linguagem forem teoremas de T; na hipótese contrária, T diz-se não trivial. Patentemente, as teorias triviais não apresentam interesse direto do prisma lógico: nelas não podemos separar as proposições que são teoremas das que não são.

Um dos traços marcantes da lógica tradicional é o de que qualquer teoria dedutiva nela baseada, que for inconsistente, será também trivial. Essa lógica não permite que se separem os conceitos de trivialidade e de inconsistência. Para permitir essa separação, foram criadas as lógicas paraconsistentes, que são lógicas capazes de servir de fundamento para teorias inconsistentes e não triviais. Em tais teorias, podem ser teoremas uma proposição e, ao mesmo tempo, sua negação, sem que a teoria deixe de ser importante do ponto de vista lógico. Ou seja, a teoria não colapsa na trivialidade, muito embora contenha inconsistências.

Mas se numa teoria fundada sobre uma lógica paraconsistente podem existir contradições, isto é, segundo vimos, teoremas cujas negações são também teoremas, isto não implica que todas as proposições infrinjam a lei da contradição, sendo todas elas e suas negações, verdadeiras. As teorias inconsistentes de relevância são aquelas que contêm não apenas proposições "mal comportadas", tais que elas e suas negações incluem-se entre os teoremas, mas encerram, além delas, proposições "bem comportadas", que são verdadeiras, embora suas negações não o sejam.

A lógica paraconsistente evidencia que as teorias inconsistentes não devem ser descartadas unicamente por se evidenciarem inconsistentes, por infringirem o princípio de contradição. Este fato possui as mais variadas conseqüências filosóficas, destruindo um paradigma que vem governando a razão humana há dois milênios.

A lógica paraconsistente encontra aplicações em tentativas feitas com o intuito de se formalizar parcialmente a dialética. Outras aplicações surgiram na matemática e na filosofia da ciência: I. Lakatos chamou a atenção dos filósofos da ciência para a existência de teorias físicas que foram aceitas, mesmo se manifestando inconsistentes; exemplo de teoria desse tipo é a teoria do átomo de Bohr. Outra possível aplicação da lógica paraconsistente vincula-se com a dualidade onda-corpúsculo e o princípio da complementaridade de Bohr.

Os sistemas lógicos paraconsistentes mais fortes englobam a lógica tradicional como caso especial, regendo as proposições bem comportadas, e constituem o fundamento de teorias de conjuntos e de matemáticas paraconsistentes tão inclusivas quanto as teorias de conjuntos clássicas e a matemática comum.

Surpreendentemente, as lógicas paraconsistentes, pelo menos as mais destacadas, possuem semânticas razoáveis, que estendem as concepções semânticas padrão.

A lógica paraconsistente teve dois precursores dignos de menção: o lógico polonês J. Lukasiewicz e o filósofo russo N.A. Vasilev, os quais, simultânea mas independentemente, em 1910, procuraram estabelecê-la. Porém, devido a variadas circunstâncias, ela só se constituiu a partir dos trabalhos do lógico polonês S. Jaskowski e dos de N.C.A. da Costa, que, a partir de 1948 e de 1953, começaram a investigar sistematicamente os sistemas paraconsistentes mediante os instrumentos e técnicas da lógica contemporânea. As perquirições de Jaskowski e as de da Costa se iniciaram de maneira independente, embora houvesse convergência posterior. Hoje, a lógica paraconsistente inclui-se entre os temas de estudo mais ou menos correntes no domínio da lógica, algo indiscutivelmente inconcebível há 25 anos.

Denomina-se paracompleta uma lógica que derrogue a lei do terceiro excluído. Em tais lógicas, ou melhor, em teorias nelas fundamentadas, pode haver proposições tais que nem elas nem suas negações sejam verdadeiras.

Exemplo de lógica paracompleta é a lógica intuicionista de L.E.J. Brouwer e A. Heyting, formalizada na década de 30. A semântica de tal lógica diverge completamente da semântica clássica, o que tem como corolário a invalidade da lei do terceiro excluído. Não podemos entrar em detalhes sobre essa lógica aqui, a qual surgiu de uma concepção filosófica da matemática bem afastada da postura tradicional. Limitar-nos-emos, apenas a sublinhar que a lógica intuicionista é susceptível de ser encarada como a lógica do raciocínio matemático construtivo, em que a existência de um número, por exemplo, só é demonstrável mediante a construção desse número, de sua exibição.

Para Brouwer, Heyting e seus seguidores, a matemática é uma atividade construtiva de nosso pensamento e a lógica tem por finalidade catalogar as regularidades dessa atividade construtiva. A lógica apropriada para a matemática construtiva deve ser a lógica intuicionista e não a clássica, essencialmente irreconciliável com os raciocínios construtivos do matemático. A lógica intuicionista, pois, foi proposta como rival da clássica, com o objetivo de substituí-la no campo do pensamento matemático construtivo. Aliás, diga-se de passagem, para os intuicionistas ortodoxos somente existe a matemática construtiva; a matemática tradicional, intrinsecamente não-construtiva, deveria ser abandonada como pseudo-ciência.

Sem procurarmos discutir com mais profundidade o intuicionismo e sua lógica, lembraremos, tão somente, que esta última tem sido utilizada em vários domínios do saber, como, recentemente, na teoria da decisão.

Outro tipo de lógica paracompleta digno de referência é a lógica polivalente, criada de modo independente, porém simultâneo, por Lukasiewicz e E.L. Post por volta de 1920. Nesta categoria de lógica as proposições podem assumir *valores de verdade* entre o verdadeiro e o falso.

Lukasiewicz chegou à formulação da lógica polivalente motivado por um problema filosófico, o problema dos futuros contingentes de Aristóteles. Em síntese a questão é a seguinte: certas proposições contingentes, referentes ao futuro, como "Em dez anos haverá uma guerra mundial", não parecem poder ser, hoje, verdadeiras ou falsas, sem que isto acarrete uma forma de determinismo estrito. Se todas as proposições relativas a contingências futuras forem, agora, verdadeiras ou falsas, o futuro pareceria estar determinado pelo estado presente do mundo, e, por conseguinte, o futuro seria determinado pelo passado, não havendo livre-arbítrio, etc. Logo, uma espécie de lógica compatível com alguma categoria sensata de inde-

terminismo tem que conferir, em qualquer momento, às proposições concernentes a acontecimentos futuros, de caráter contingente, um terceiro valor lógico, diverso da verdade e da falsidade: elas seriam indeterminadas. Assim, o grande lógico polonês foi conduzido a elaborar uma lógica trivalente (com três valores de verdade) e, após, as lógicas polivalentes em geral, algumas com infinitos valores de verdade.

As lógicas polivalentes têm sido empregadas nos mais variados contextos; por exemplo, na programação de computadores, na teoria dos circuitos elétricos (particularmente por G. Moisil), na lingüística e na teoria da probabilidade. H. Reichenbach tentou utilizá-la na fundamentação da mecânica quântica.

Acabamos de debater apenas algumas das lógicas ditas rivais da clássica. Existem numerosas outras, tais como a lógica modular (originada pela mecânica quântica e estudada especialmente por J. Kotas), a lógica livre, a lógica relevante e a lógica intuicionista sem negação de Griss.

A conceituação de lógica clássica, por nós apresentada, não se mostra precisa. Com efeito, a lógica hodierna evoluiu tanto e está sendo palco de avanços tão revolucionários que se torna impossível caracterizá-la de maneira precisa. Em decorrência, os conceitos de lógica complementar da clássica e de lógica heterodoxa também se evidenciam algo vagos. Assim, exemplificando, afigura-se difícil enquadrar certos sistemas lógicos na classificação delineada, como acontece com os sistemas lógicos de S. Lesniewski e com a lógica combinatória (M. Schönfinkel, H.B. Curry. . .). Todavia, isto não tem importância; não se pode, efetivamente, definir de maneira exata e precisa qualquer ciência viva e progressista. E tal fenômeno se passa com a lógica em nossos dias, em cujos domínios se processa atualmente uma transformação fecunda, análoga à que ocorre nas ciências aparentemente mais progressistas, como a física e a genética.

O estudo da lógica em nossa época nos induz a formular indagações profundas, envolvendo perguntas filosóficas de extraordinária significação, como as seguintes: Racionalidade e logicidade de algum modo coincidem? Se há várias lógicas, existem, em decorrência, vários tipos de razão? As lógicas heterodoxas são, de fato, rivais da clássica? No fundo não seriam, talvez, apenas sistemas complementares do clássico? Quais as relações existentes entre a lógica, a linguagem e as ciências empíricas? A lógica, em seu estado de desenvolvimento atual compromete-nos com posições filosóficas, em particular, com estruturas ontológicas definidas?

Essas e outras questões preocupam presentemente lógicos e filósofos. Elas se converteram em problemas agudos depois da descoberta e da proliferação das lógicas não-clássicas, aparecidas há tão pouco tempo e prenunciando uma revolução na história da cultura, como jamais houve antes.

## 2. Aspectos da Lógica Clássica

Como já dissemos, a lógica é usualmente conceituada como a ciência das inferências válidas. Tais inferências são raciocínios cujas premissas não podem ser verdadeiras sem que a conclusão também o seja, e denominam-se inferências dedutivas ou, simplesmente, deduções.

Há outra lógica, batizada de indutiva, que estuda as inferências cuja verdade das premissas não garante, com certeza, a verdade da conclusão. Estas inferências chamam-se inferências indutivas ou induções.

Neste trabalho não abordaremos esse segundo tipo de lógica, mas tão-somente o primeiro. Ou seja, falaremos apenas da lógica dedutiva.

A lógica dedutiva, ou lógica "tout court", pode ser dividida em duas categorias: a clássica e as não-clássicas, como vimos. Agora, teceremos alguns comentários sobre a primeira.

Historicamente, a lógica clássica originou-se, ao que tudo indica, na obra de Aristóteles (384-322 a.C.). Durante 2.000 anos ela permaneceu quase como o estagirita a deixou. Kant chegou mesmo a sustentar que, desde Aristóteles, a lógica não havia dado nenhum passo para a frente e nenhum para trás, e que, por conseguinte, se constituía numa ciência acabada.

A história da lógica encontra-se cheia de "ilogicidades", como, por exemplo, as seguintes: a) não obstante a extraordinária contribuição feita para a lógica pelos megáricos e pelos estóicos, as concepções destes praticamente não tiveram influência no desenvolvimento posterior da lógica. Embora os megáricos e estóicos tivessem ido, sob certos aspectos, muito além de Aristóteles e seus discípulos, somente em nosso século foi que os historiadores da lógica compreenderam o espírito das inquirições lógicas da escola megárico-estóica, sobretudo sua criação do cálculo proposicional; b) durante dois milênios a lógica se resumiu, praticamente, à transmissão da obra de Aristóteles, com modificações superficiais, que a tornavam mais confusa e repleta de incongruências, sem que se desse conta dessas incoerências; c) a lógica aristotélica, cuja essência era a teoria do silogismo (determinada forma de inferência dedutiva), embora fosse encarada como a teoria de todos os tipos de raciocínios válidos, não conseguia englobar, de modo natural, diversas classes de deduções, tais como a maioria das encontradas na matemática.

Para o lógico de nossos dias, torna-se difícil entender como as trivialidades da lógica aristotélica, embora relevantes como início das investigações lógicas, pudessem permanecer tanto tempo estagnadas; mais do que isso, parece incrível que ela fosse tida e havida como enquadrando todas as inferências dedutivas.

A situação somente começou a mudar com G. Boole (1815-1864), A. De Morgan (1806-1871) e, sobretudo, com G. Frege (1848-1925). Houve precursores dessa mudança, como G. Leibniz (1646-1716) e J.H. Lambert (1728-1777). Porém, em certa acepção, somente depois de Bertrand Russell (1872-1970), no alvorecer deste século, é que se inaugurou efetivamente o progresso revolucionário que transfigurou a lógica em nossa época. Não exageraríamos se asseverássemos, como A.N. Whitehead, que a lógica atual está para a lógica aristotélica como a matemática moderna está para a aritmética das tribos primitivas.

E o grande paradoxo é que, muito embora a nova lógica seja de enorme valor para a filosofia, alguns tratadistas dessa disciplina e seus seguidores ainda hoje teimam em expor a lógica aristotélica como se constituindo em toda a lógica. Seria razoável que semelhantes tratadistas também apresentassem a física de Aristóteles como sendo a derradeira palavra em física, pois, assim, suas posições no campo da lógica e no domínio da física se equivaleriam. . .

Nesta secção não tencionamos fazer história da lógica, nem polemizar com pessoas que mantêm idéias fossilizadas. Desejamos, unicamente, discorrer sobre alguns dos tópicos dos quais se ocupam os lógicos no momento.

É oportuno insistir em duas coisas: a) a lógica deixou de ser apenas a ciência das inferências válidas, passando a englobar outros assuntos. Na realidade, ela se converteu em uma disciplina matemática; b) a lógica (clássica) atualmente pode ser tida como o estudo do cálculo de predicados clássico de primeira ordem e de suas principais extensões, como já se afirmou na seção precedente. Por outro lado, existem ramos da lógica clássica que se acham apenas remotamente ligados a essa ciência assim definida. Aliás, o mesmo ocorreria com qualquer outra conceituação, pois a lógica é uma doutrina viva e progressista, resistindo, portanto, a qualquer tentativa de condensá-la numa receita simples.

Em nossa opinião, inspirada nas idéias do lógico norte-americano L. Henkin, as principais áreas de pesquisa, no estado presente de evolução da lógica (clássica), são as seguintes: a) sintaxe lógica; b) teoria dos modelos; c) teoria da recursão; d) lógica algébrica; e) aplicações da lógica à matemática, especialmente à álgebra; f) fundamentos da matemática.

Para o leitor inteirar-se, mesmo de maneira um tanto vaga, do que se faz hoje nos domínios da lógica, discorreremos sobre esses seis tópicos. Não se torna preciso sublinhar que a exposição não será nem rigorosa nem completa.

## Sintaxe Lógica

Nesta área da lógica estudam-se linguagens artificiais, formalizadas, nas quais são traduzidos os problemas lógicos referentes às linguagens naturais e às linguagens da matemática e das ciências empíricas. Por meio desse artifício, obtêm-se resultados sumamente importantes. Por exemplo, K. Gödel (1931) mostrou que, sob condições simples e aceitas como naturais, a maioria das teorias matemáticas não podem ser axiomatizadas de modo completo (isto é, formalizadas). Noutras palavras, uma teoria matemática como a aritmética elementar, caso seja consistente, isto é, não encerre contradições, não pode ser derivada de um conjunto explicitamente dado de axiomas, por meios das regras lógicas de inferência. E isto vale, por mais que se reforcem os axiomas iniciais. Logo, as verdades informais de uma teoria matemática não são susceptíveis de serem, todas, demonstradas. De seu resultado, Gödel deduziu outro: a maior parte das teorias matemáticas não podem ser provadas consistentes, a não ser por meio de teorias mais fortes e, portanto, mais inseguras do que a inicial. Em certo sentido preciso, não se pode legitimar a matemática de modo absolutamente seguro. Como o matemático francês A. Weil disse: "Deus existe porque a matemática é consistente, mas o Diabo também, porque não podemos demonstrar esse fato".

Por seu significado intrínseco e pelas suas conseqüências filosóficas, as indagações de Gödel se constituem em uma das mais notáveis realizações da lógica e da matemática em todos os tempos.

## Teoria dos Modelos

A teoria dos modelos também se chama semântica (lógica). Nela se investigam as relações existentes entre as linguagens (formalizadas) da lógica e da matemática e as estruturas às quais essas linguagens se referem. A teoria dos modelos, em sua fase atual, foi edificada na década de 50, por A. Tarski e A. Robinson. Um dos produtos mais significativos da semântica, foi a matematização, feita por Traski, do conceito de verdade (efetuada por volta de 1935, mas somente utilizada de modo sistemático na teoria dos modelos, vinte anos após). Antes de Traski, só se podia falar de verdade de modo informal e não matemático. Agora, há uma formulação matemática do conceito em apreço, que permite que se derivem teoremas como o seguinte, devido a Traski: nas teorias matemáticas (usuais) fortes e consistentes, os conceitos de proposição verdadeira e de proposição demonstrável (ou teorema) jamais coincidem, o primeiro sendo mais abrangentes do que o segundo.

A teoria dos modelos possui as mais variadas aplicações, como, por exemplo, na metodologia da ciência, na teoria do conhecimento e nas ciências empíricas.

## Teoria da Recursão

Podemos nos acercar da teoria da recursão de vários pontos de vista. Sem nos preocuparmos com o rigor, podemos afirmar que ela versa sobre o que é exeqüível mecanicamente, computacionalmente, sem recurso à inteligência. Trata da teoria geral das máquinas, que atuam de maneira mecânica, sempre dependendo das ordens que recebem. Na teoria em tela, definem-se certas máquinas ideais, introduzidas por A. M. Turing, e elas são estudadas. Questão típica da teoria dessas máquinas é a seguinte: quais as relações numéricas (funções) entre os números naturais, que elas podem "calcular"? Todos os grandes computadores da atualidade são realizações físicas das máquinas de Turing. Quando esses computadores começaram a ser projetados e construídos, ao redor de 1950, por J. von Neumann e seu grupo, a teoria geral dessas máquinas já existia, pois Turing criou a teoria de suas máquinas em 1936.

Um dos resultados nucleares da teoria da recursão é o teorema de Church-Turing, segundo o qual, para a aritmética usual, suposta consistente, não existe nenhuma classe de máquina de Turing capaz de provar todos os seus teoremas e somente eles. Conclui-se, daí, que o matemático é imprescindível para a evolução da matemática . . . A matemática tem necessidade de cérebros e não apenas de máquinas, mesmo de máquinas extremamente poderosas e ideais, como as de Turing. Outro corolário da teoria da recursão é o de que a lógica aristotélica, particularmente a teoria do silogismo, afigura-se estritamente mais fraca do que a nova lógica.

## Lógica Algébrica

Nesta parte da lógica lança-se mão de métodos matemáticos, especialmente algébricos, para se examinar os sistemas lógicos. A título de exemplificação, mencionaremos que um sistema lógico muito conhecido, o cálculo proposicional clássico, do prisma algébrico não passa de uma álgebra de Boole; quem está trabalhando com tal cálculo está fazendo, sem saber, álgebra.

Os sistemas lógicos mais importantes, sob o ângulo algébrico, constituem, em determinado sentido, reticulados, isto é, uma estrutura algébrica bem conhecida. Deste modo, os métodos da teoria dos reticulados são utilizados para fecundar a lógica.

## Aplicações da Lógica à Matemática

Na lógica algébrica empregam-se métodos matemáticos para lidar com a lógica. Nas aplicações da lógica à matemática (que poderíamos denominar de "matemática lógica" ou de "álgebra lógica", caso essas expressões não fossem tão impróprias) recorre-se a teoremas e métodos da lógica para se manipular questões matemáticas. Por meio desse expediente, foram resolvidos problemas abertos em álgebra, de grande relevância. Como o tema é demasiadamente técnico, dele não convém falar com mais detalhes.

## Fundamentos da Matemática

Neste domínio, procura-se estruturar sistemas lógicos potentes, nos quais seja possível fundamentar a matemática clássica. Três classes desses sistemas são as teorias usuais de conjuntos, as teorias dos tipos e as diversas formas de teorias das categorias. Os sistemas de fundamentação da matemática são comparados entre si, analisados em suas idéias básicas e transformados pela adição ou pela supressão de axiomas. Interessa ao lógico que se ocupa da fundamentação da matemática, entre outras coisas, a investigação de novas matemáticas, oriundas de variantes dos sistemas de fundamentação mais comuns, embora se mantenham válidos os princípios centrais da lógica clássica.

Aqui parece haver uma dificuldade: se a lógica é uma disciplina matemática e se, por outro lado, serve para fundamentar esta ciência, não nos encontramos, então, enredados em um círculo vicioso? Na realidade não existe nenhum círculo vicioso, mas a única forma de se comprovar tal fato é pelo cultivo sistemático da lógica. . .

Após ter lido a exposição acima, o leitor sem dúvida se recordará do espírito da célebre frase de Hamlet, quando disse a seu amigo Horácio: "entre o céu e a terra existem muito mais coisas do que sonha sua filosofia". Na lógica contemporânea se está efetuando uma das máximas revoluções intelectuais de todos os tempos, sendo lastimável que tão poucas pessoas, tão bem informadas sobre outros campos do saber, conheçam esse fato.

## 3. A Lógica Elementar Clássica

Este livro constitui uma introdução à lógica elementar clássica, ou cálculo de predicados de primeira ordem com igualdade, à qual adicionamos o símbolo de Hilbert.

A lógica elementar, como já asseveramos, trata dos conectivos (*implica, e, ou, não*, . . .) e dos quantificadores (*todo e algum*), quando estes

últimos se referem apenas aos objetos do domínio ao qual a lógica se aplica (e não a propriedades e relações que vigem entre esses objetos). Ela é de importância fundamental para a lógica e a matemática tradicionais, pois é o ponto de partida para a codificação rigorosa das mesmas. Mas também é relevante para as lógicas não-clássicas, dado que estas sempre se originam a partir de modificações de seus princípios. Além disso, ela é importante por si própria, como teoria matemático-formal extremamente fecunda, e encontrou aplicações variadas na filosofia, nas ciências empíricas e na tecnologia. Por exemplo, ela se evidenciou imprescindível para a computação.

Ultimamente, a teoria dos *operadores que formam termos ligando variáveis de fórmulas*, dentre os quais o símbolo de Hilbert se destaca, tem sido muito desenvolvida e encontrado aplicações diversas. Por outro lado, o caráter *não trivial* das técnicas necessárias para se estudar o símbolo em questão torna patente o significado profundo das noções da lógica hodierna. Por tudo isto, achamos que uma introdução à lógica fundada no símbolo de Hilbert associado à lógica elementar afigura-se conveniente.

# CAPÍTULO 1

# A LINGUAGEM DA LÓGICA ELEMENTAR CLÁSSICA

Vamos construir a linguagem L da lógica elementar clássica, acrescida do chamado operador de Hilbert. Isso será feito com auxílio de outra linguagem, a metalinguagem de L, que consiste essencialmente do português usual, enriquecido com os nomes dos símbolos de L e de certos termos matemáticos. L possui duas partes:

a) *A gramática*, que nos fornece os símbolos primitivos (alfabeto) e nos ensina a construir expressões bem formadas (termos e fórmulas) de L;

b) *A estrutura dedutiva*, ou "lógica" de L, que nos fornece as *regras de inferência*, que nos permitirão passar de umas fórmulas a outras, isto é, raciocinar, fazer deduções.

## 1.1. Gramática de L

Os *símbolos básicos (primitivos)* de L, ou seja, seu *alfabeto*, dividem-se nas seguintes categorias sintáticas:

1) Conectivos (ou operadores proposicionais):

1.1) $\rightarrow$ símbolo de implicação (lê-se *implica*)

1.2) $\wedge$ símbolo de conjunção (lê-se *e*)

1.3) $\vee$ símbolo de disjunção (lê-se *ou*)

1.4) $\neg$ símbolo de negação (lê-se *não*)

Mais tarde será introduzido o símbolo de equivalência $\leftrightarrow$ (lê-se *equivale*). Não é um símbolo primitivo, mas é *definido*, como abreviação de uma combinação de símbolos primitivos).

A esta altura cabem algumas observações informais sobre a correspondência intuitiva que percebemos entre a linguagem artificial L, que está sendo construída, e a linguagem natural (o português) que estamos empregando para falar dela. Não devemos imaginar que esta correspondência seja exata, e que possamos traduzir, completamente, sempre, e em todos os casos, a linguagem natural na linguagem L. Como exemplo de situação em que isto não é possível, temos a dos chamados *condicionais contrafáticos* (de grande importância em setores das ciências humanas, como a história), que não são adequadamente refletidos pela implicação $\rightarrow$ de L. Como veremos mais adiante, quando tivermos dado as regras que regem esta implicação (chamada de implicação *material*), uma fórmula do tipo $A \rightarrow B$ será *verdadeira* em qualquer *interpretação* desde que A (chamado

antecedente) seja falso, não importando se B (o conseqüente) é verdadeiro ou não. Assim, as sentenças *contrafáticas*

i) Se Napoleão tivesse vencido em Waterloo, o mundo seria diferente.

ii) Se Napoleão tivesse vencido em Waterloo, o mundo não seria diferente.

seriam ambas verdadeiras (pois o antecedente é falso) do ponto de vista da implicação de L, o que se mostra incongruente do prisma da linguagem ordinária e também da história.

Não suponhamos, contudo, que tal inadequação de tradução da linguagem ordinária para L só afete as ciências humanas. Problemas análogos surgem nas ciências naturais. Por exemplo, o princípio da inércia, da física tradicional: "Se nenhuma força atua sobre um corpo, este permanece em estado de repouso ou movimento retilínio uniforme" – dá origem a situação parecida à dos enunciados contrafáticos, pois seu antecedente é sempre falso (sabemos que no universo não há nenhum corpo sobre o qual não atue nenhuma força). Assim, a aplicação da lógica elementar clássica à física deve ser precedida de cuidadosa análise dos contextos e leis físicas.

É importante destacar, porém, que a implicação material, $\rightarrow$, de L expressa adequadamente todas as implicações da linguagem matemática tradicional.

Voltando aos símbolos primitivos de L, passemos às demais categorias (sintáticas) dos mesmos.

**2) Quantificadores**

$\forall$ quantificador universal (lê-se *para todo*)

$\exists$ quantificador existencial (lê-se *existe pelo menos um* ou *existe um*)

**3) Símbolos auxiliares**

(,) parênteses. Servem para indicar como se agrupam os símbolos nas expressões de L (portanto, como os sinais de pontuação da linguagem comum, auxiliam a leitura, mas não se lêem). Podemos empregar também chaves e colchetes { } e [ ], mas isto por *abuso de linguagem,* já que estes sinais não são símbolos primitivos de L e podem ser dispensados em favor de parênteses.

**4) Variáveis individuais**

São as seguintes $z_0, z_1, z_2, z_3, \ldots$

As variáveis constituem símbolos que servem para nos referirmos a indivíduos: indicam um *indivíduo* ou *objeto qualquer* do domínio dos objetos sobre o qual a linguagem estiver falando.

O fato de que as variáveis de L sejam símbolos formados pela mesma letra z do alfabeto latino, tendo como subíndices os números naturais, garante que haja, para cada número natural, uma e só uma variável, e que o número de variáveis seja infinito. Isto é fundamental para o poder expressivo da lógica elementar, como foi evidenciado, entre outros, por L. Henkin.

**5) Constantes (individuais)**

Assumimos que L contém um conjunto qualquer de constantes, em particular vazio (não existem constantes).

Em nossa construção de L estamos, na realidade, caracterizando não uma linguagem perfeitamente determinada, mas uma *família* de linguagens. Convém-nos, de fato, deixar propositadamente indeterminada a categoria das constantes. (A mesma coisa irá ocorrer com a próxima categoria sintática, a dos símbolos de predicado). Conforme a teoria que pretendemos expressar em L, escolhemos o nosso conjunto de constantes.

**Exemplos:**

1) Em certas formulações da aritmética, 0, 1, 2, . . . serão as constantes individuais;

2) Na teoria dos grupos pode-se utilizar somente uma constante, que denota o elemento neutro da operação de grupo;

3) Na teoria das relações de ordem com maior elemento, recorre-se, em geral, a uma constante que denota esse elemento.

**6) Símbolos de predicado**

Qualquer conjunto de símbolos de predicado que inclua o símbolo de igualdade (=). Predicados, intuitivamente, expressam as propriedades dos, ou as relações entre objetos do domínio ao qual a linguagem se refere. Uma propriedade de um objeto é um predicado de grau um; uma relação entre dois objetos é um predicado de grau dois; uma relação entre 3 (4, 5, . . . ) objetos é um predicado de grau 3 (4, 5, . . . ).

**Exemplos:**

Predicado de grau 1 ou monádico: *ser racional*; aplicado a um objeto *a* origina a proposição *a é racional*;

Predicado de grau 2 ou didático: *menor do que*; aplicado nos números 40 e 61, origina a proposiçãa *40 é menor do que 61*;

Predicado de grau 3 ou triádico: *estar entre*; aplicando-o aos pontos *h, l* e *m*, obtém-se a proposição *k está entre l e m*.

A igualdade é um predicado de ordem 2, que sempre estará incluído entre os predicados binários de L.

Poderíamos, também, incluir entre os predicados os predicados de grau 0; eles expressariam proposições, sendo verdadeiros ou falsos. No en-

tanto, tais predicados proposicionais não serão incluídos em nossa linguagem (o leitor facilmente poderá, como exercício, alterar nossa exposição para incluí-los em L).

Informalmente, todo *símbolo de predicado* de grau n denota um predicado do mesmo grau, que pode conectar objetos do domínio ao qual se refere L ($n > 1$).

**7) Símbolo de Hilbert**

O símbolo de Hilbert é $\varepsilon$, ou seja, a letra grega minúscula épsilon. Informalmente o significado de $\varepsilon$ pode ser esclarecido por meio de um exemplo. Se Q for um símbolo de predicado de grau 1 e x uma variável, então $\varepsilon xQx$ denota um objeto x tal que x possui a propriedade Q, ou um objeto fixo qualquer, se não houver nenhum objeto que tenha a propriedade Q. O símbolo de Hilbert também se denomina *descritor indefinido*, pois permite que nos refiramos a um objeto do domínio de indivíduos que têm uma propriedade, mesmo que não saibamos precisamente qual é esse objeto. De um modo geral, $\varepsilon$ aplica-se a fórmulas para formar termos (definiremos logo a seguir formula e termo), e os termos se referem a objetos, denotando-os.

Tendo concluído a apresentação dos *símbolos primitivos* de L, introduziremos, a seguir, as definições de *expressões, termos* e *fórmulas* de L. As definições serão dadas na metalinguagem: não usaremos os símbolos de L, mas falaremos sobre eles utilizando os seus nomes na metalinguagem. Nesta, x, y, . . . serão nomes de variáveis; P, Q, . . . nomes de símbolos de predicados; os conectivos, os quantificadores e os parênteses serão os seus próprios nomes na metalinguagem. *Termos* e *fórmulas* serão definidos simultaneamente, por *indução dupla*, através de uma série de cláusulas que os caracterizam.

**Definição 1.1.1** (*Expressão*)

Qualquer seqüência finita de símbolos de L chama-se uma *expressão de L.*

Assim, são expressões de L as seguintes seqüências:

$$\rightarrow \; \rightarrow \; \rightarrow \; \neg \; \forall x \qquad Px,$$

onde x e P denotam, respectivamente, uma variável e um símbolo de predicado monádico de L.

No entanto, as seqüências

$$\rightarrow \; \uparrow, \; \forall \; x^* \; x \; e \; x \; \Leftarrow \rightarrow \; x,$$

não são expressões de L, mesmo se supondo que x seja uma variável de L, porque contêm símbolos que não são símbolos primitivos de L.

**Definição 1.1.2** (*Termos e fórmulas*)

1) As variáveis e as constantes individuais são termos;

2) Se A e B forem fórmulas, então $(A \rightarrow B)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ e $\neg A$ são também fórmulas;

3) Se x for uma variável individual e A uma fórmula, então $\varepsilon xA$ é um termo;

4) Se x for uma variável individual e A uma fórmula, então $\exists xA$ e $\forall xA$ são fórmulas;

5) Se Q for um símbolo de predicado de ordem n e $t_1, t_2, \ldots t_n$ forem n termos, então $Qt_1t_2 \ldots t_2$ é uma fórmula atômica.

6) Os únicos termos e as únicas fórmulas são os dados por 1 a 5 anteriores.

Termos e fórmulas constituem expressões de L.

Havíamos comparado, informalmente, os símbolos de L a um "alfabeto". Analogamente, termos e fórmulas se comparam respectivamente a *nomes* e *proposições* que podemos escrever com este alfabeto. Os termos designarão objetos e as fórmulas expressarão proposições. Ao final deste capítulo, alguns exemplos e exercícios procurarão tornar essas correspondências mais claras.

**Definição 1.1.3** (*Símbolo de equivalência* ($\leftrightarrow$))

Sejam A e B fórmulas. Então,

$$(A \leftrightarrow B) =_{Def} (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$$

O símbolo definido $\leftrightarrow$ não pertence à linguagem L, mas à sua metalinguagem. Sua introdução destina-se a simplificar a escritura das fórmulas de L.

As fórmulas e os termos chamam-se *expressões bem formadas (ebfs) de L*. Ao escrevermos as fórmulas suprimiremos, quando existirem, os parênteses externos. Outras simplificações análogas, relativas às expressões bem formadas, embora implícitas, ficarão claras pelo contexto.

Vamos agora provar, por meio da lógica informal da metalinguagem, alguns resultados sobre termos e fórmulas.

**Teorema 1.1.1** Se P for um símbolo de predicado de ordem 2, Q um símbolo de predicado de ordem 1, *x* uma variável e *a* uma constante, então $Pa\varepsilon_x Q_x$ é uma fórmula.

**Demonstração**: Consistirá em se mostrar, recorrendo às cláusulas apropriadas da definição 1.1.2, que

1) *a* é um termo (1)

2) $\varepsilon_x Q_x$ é um termo, (3) já que:

a) x é um termo (1)

b) $Q_x$ é uma fórmula (5)

3) e que, portanto, $Pa\varepsilon_x Q_x$ é uma fórmula, pois P é um predicado de ordem 2 seguido de 2 termos (5)

**Teorema 1.1.2** $\neg xB$, onde x é uma variável e B uma fórmula, não é nem termo nem fórmula.

**Demonstração**: Deve-se mostrar, examinando a definição cláusula por cláusula, que

a) um termo nunca começará por uma negação;

b) uma fórmula nunca começará por uma negação seguida de uma variável.

*a* e *b* serão comprovados pelo exame das cláusulas 1 a 5; a cláusula 6 é importante neste tipo de demonstração por garantir que *não há outros casos* além dos examinados.

**Exercícios**: demonstrar que:

1) $\neg Bx$, onde x é uma variável e B uma fórmula, não é nem termo nem fórmula.

2) Nenhum termo é fórmula, e reciprocamente.

3) Existem expressões que não são bem formadas.

4) Se $t_1$ e $t_2$ forem termos, então $t_1 = t_2$ não é fórmula. $=t_1 t_2$ é fórmula? (Embora a notação canônica seja a última, por convenção podemos adotar a primeira, como é habitual).

**Semântica informal de L**:

Alguns exemplos tornarão mais ou menos transparente a semântica informal de L. Para fixar idéias, admitiremos que estamos falando dos pontos de uma linha reta da geometria euclidiana. P simbolizará a relação *precede* ou *coincide*, e Q a relação *está entre*. Portanto, P é um símbolo de predicado de grau 2 e Q um símbolo de predicado de grau 3. Se c, f e g forem constantes, em nosso exemplo denotam *pontos* fixos.

*Pcf* significa c *precede* ou *é igual a* f e Qcfg significa c *está entre* f e g.

Vejamos o que exprimem certas fórmulas:

1) $\forall x \, \exists y \, Pxy$: todo ponto x é tal que existe um ponto y tal que x precede ou é igual a y.

2) $\forall x \, \forall y \, \forall z \, (Qxyz \rightarrow (Pxy \wedge Pyz))$: três pontos x, y e z quaisquer são tais que, se x está entre y e z, então x precede ou é igual a y e y precede ou é igual a z.

3) $\forall x \forall y ((Pxy \wedge Pyx) \to x = y)$: os pontos x e y quaisquer são tais que se x precede ou é igual a y e y precede ou é igual a x, então x é igual a y.

4) $\forall x \forall y \forall z (Qxyz \to (\exists t\, Qtxy \wedge \exists u\, Quyz))$: quaisquer que sejam os pontos x, y e z, se x está entre y e z, então existe um ponto que está entre x e y e existe um ponto que está entre y e z.

5) $\forall x \forall y (x \neq y \to P\varepsilon tQtxy\ y)$: quaisquer pontos x e y são tais que se x for diferente ($x \neq y$ abrevia $\neg x = y$) de y, então um ponto que esteja entre x e y, precede ou é igual a y.

6) $\exists x (x = \varepsilon xPxy \wedge Pxy)$: existe um ponto x que é igual a um ponto que precede y e o ponto x precede y.

**Exercício**: Que significam, informalmente, as fórmulas abaixo?

Nos quatro exemplos abaixo, L refere-se aos pontos da reta euclideana, com a interpretação anterior:

1) $\exists x \forall y (Pxy \wedge \neg Pyx)$

2) $P\varepsilon\, xPxyz$

3) $\varepsilon\, xPxy = \varepsilon yPxy \to x = y$

4) $\forall x \exists y (Pxy \wedge x \neq y)$

A seguir, as fórmulas se referem a números naturais, e $<$ simboliza o predicado binário *é maior que*:

5) $\forall x(x < x \to x = x)$

6) $\forall x \exists y (x = y \wedge y = y)$

7) $\exists x \forall y (x \neq y \to x < y)$

8) $\exists x (A(x) \wedge \forall y (A(y) \to x = y))$, onde $A(x)$ é uma fórmula da aritmética.

## 1.2. A Estrutura Dedutiva de L

Após termos construído a gramática de L, passamos agora a elaborar sua estrutura dedutiva. Ela consiste das regras de inferência, que nos dirão como passar de certas fórmulas (as premissas) a uma outra fórmula (a conclusão), isto é, como fazer deduções. Há diversas maneiras equivalentes de se sistematizar a estrutura dedutiva da lógica elementar clássica (com o símbolo de Hilbert). A que vai ser apresentada aqui deve-se, essencialmente, a S. Jaskowski e a G. Gentzen, que a formularam de modo simultâneo, embora independente, em 1934 (é o denominado método de dedução natural).

As regras são da seguinte forma:

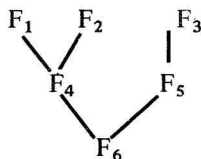
$$\frac{F_1 \quad F_2 \ldots F_n}{F}$$

Isto nos assegura que das fórmulas $F_1, F_2, \ldots, F_n$ (as premissas), podemos tirar a fórmula F (conclusão).

Para aplicar as regras, obtendo-se cadeias de raciocínios que constituem as deduções ou demonstrações em L, sempre teremos que partir de fórmulas iniciais, que são as suposições ou hipóteses de partida. Por meio delas, pelas regras, chegamos a outras fórmulas, que também podem funcionar como premissas de regras convenientes, até que, finalmente, terminamos com a conclusão da dedução ou demonstração. No decurso de uma dedução, várias das hipóteses iniciais podem ser riscadas ou cortadas, quando isto for permitido explicitamente pelas regras de inferência. Daqui para frente, reservaremos a palavra *demonstração* para designar uma dedução cujas suposições foram todas riscadas.

Adotaremos a convenção de designar fórmulas pelas letras latinas maiúsculas e os conjuntos de fórmulas pelas letras gregas maiúsculas.

Seja $\Gamma$ um conjunto de fórmulas e F uma fórmula. Se existir uma dedução de F a partir de suposições contidas em $\Gamma$, escreveremos: $\Gamma \vdash F$, que se lê, F é uma *conseqüência sintática* de $\Gamma$. Quando $\Gamma$ for vazio, isto é, há uma demonstração de F, escreveremos, simplesmente $\vdash F$, e diremos que F é um *teorema lógico*.

O processo que nos leva das suposições, cortadas ou não, à conclusão, processo em que cada passo só pode ser dado quando se está autorizado por uma das regras, é susceptível de ser representado por uma árvore, ou seja, um esquema do tipo seguinte:

Admitimos a árvore degenerada que se reduz a uma única fórmula:

F .

Se F pertence ao conjunto $\Gamma$, então as definições acima e essa árvore mostram que $\Gamma \vdash F$.

**Exercício: Prove que:**

**1) Se $\Gamma$ e $\Delta$ forem conjuntos de fórmulas, então se $\Gamma \vdash F$ resulta que $\Gamma \cup \Delta \vdash F$ ($\Gamma \cup \Delta$, a união de $\Gamma$ e $\Delta$, é o conjunto que contém todas as fórmulas de $\Gamma$ e $\Delta$ e somente essas).**

2) $\{F\} \vdash F$, onde $\{F\}$ é o conjunto cujo único elemento é a fórmula F.

3) Se $\Gamma \vdash F$ e $\Delta \cup \{F\} \vdash G$, então $\Gamma \cup \Delta \vdash G$.

**Regras de L**

De toda regra, diz-se que ela introduz ou elimina um símbolo, em sentido que ficará claro pela inspeção das regras. Por outro lado, pode-se considerar que as regras correspondentes a um conetivo definem operacionalmente esse conetivo.

(→)

$$\frac{\begin{matrix}[A]\\ B\end{matrix}}{A \rightarrow B} \quad \underline{\rightarrow \text{int}}$$

Se, supondo A, chegamos a B através de uma árvore, podemos escrever $A \rightarrow B$, e eliminar ou cortar algumas ou todas as ocorrências da suposição A

$$\frac{A \quad A \rightarrow B}{B} \quad \underline{\rightarrow \text{elim}}$$

Também chamada "modus ponens" ou regra de separação.

(Λ)

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B} \quad \underline{\wedge \text{ int}}$$

$$\frac{A \wedge B}{A} \quad \frac{A \wedge B}{B} \quad \underline{\wedge \text{ elim}}$$

(V)

$$\frac{A}{A \vee B} \quad \frac{B}{A \vee B} \quad \underline{\vee \text{ int}}$$

$$\frac{A \vee B \quad \begin{matrix}[A]\\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[B]\\ C\end{matrix}}{C} \quad \underline{\vee \text{ elim}}$$

Se de A tiramos C, e de B tiramos C, então de A V B podemos tirar C, eliminando as suposições A e B

(¬)

$$\frac{A \rightarrow B \quad A \rightarrow \neg B}{\neg A} \quad \underline{\neg \text{int}}$$

Também chamada regra de "redução ao absurdo".

$$\frac{A \quad \neg A}{B}$$

Regra N ou regra da ¬elim fraca.

$$\frac{A \rightarrow B \quad \neg A \rightarrow B}{B}$$

Regra do "terceiro excluído" ou da ¬elim forte.

As regras acima não incluem os quantificadores nem o símbolo de Hilbert. Esta parte da lógica, que se ocupa apenas dos conetivos, chama-se cálculo proposicional (clássico).

Vejamos alguns exemplos de deduções:

1) $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$

$$
\begin{array}{cl}
\not{A} \quad \not{B} & \\
\backslash \quad / & \wedge \text{ int} \\
A \wedge B & \\
| & \rightarrow \text{ int (riscamos B)} \\
B \rightarrow (A \wedge B) & \\
| & \rightarrow \text{ int (riscamos A)} \\
A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B)) &
\end{array}
$$

A e B estão riscadas porque são suposições que foram eliminadas pela aplicação da regra $\rightarrow$ int (também chamada teorema da dedução).

2) $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A)$

$$
\begin{array}{cl}
\not{A} \quad \not{B} & \\
\backslash \, / & \wedge \text{ int} \\
A \wedge B & \\
| & \wedge \text{ elim} \\
A & \\
| & \rightarrow \text{ int (riscamos B)} \\
B \rightarrow A & \\
| & \rightarrow \text{ int (riscamos A)} \\
A \rightarrow (B \rightarrow A) &
\end{array}
$$

3) $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C))$

4) $\vdash (A \wedge B) \rightarrow A$ 4') $\vdash (A \wedge B) \rightarrow B$

5) $\vdash A \to (A \vee B)$

5') $\vdash B \to (A \vee B)$

$A$ (riscado)

v int

$A \vee B$

→ int

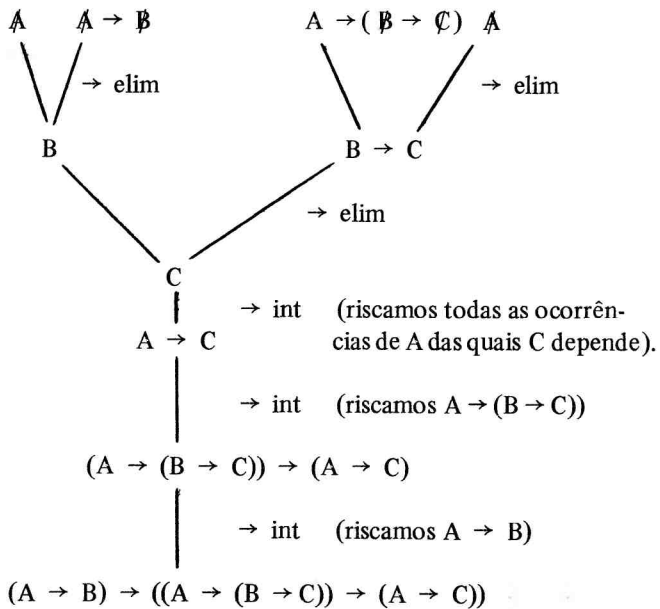
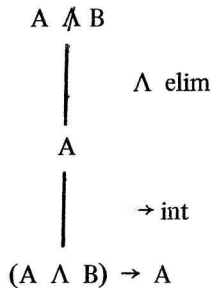
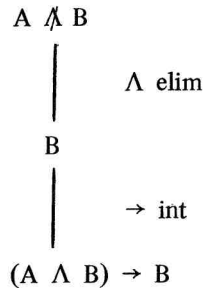
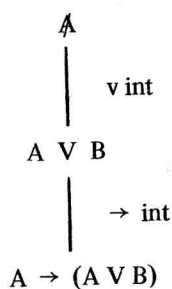
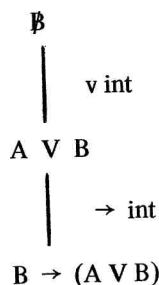
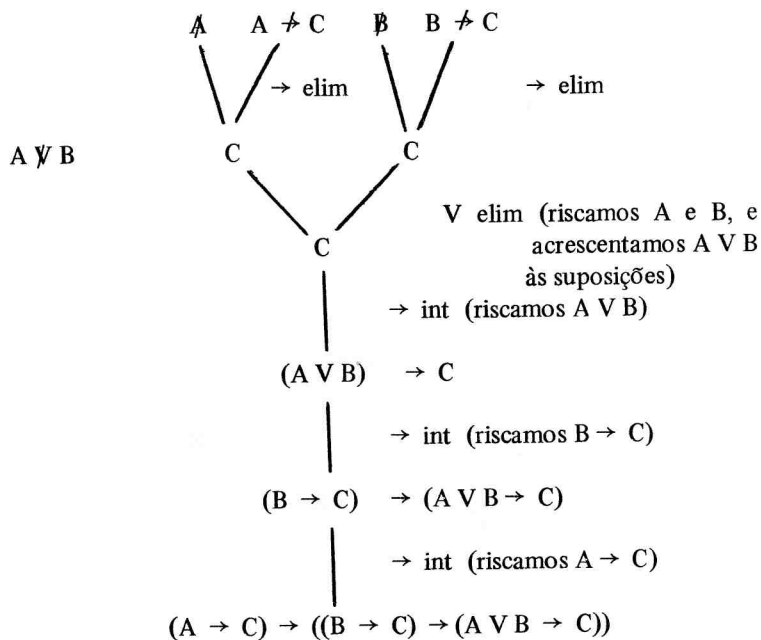
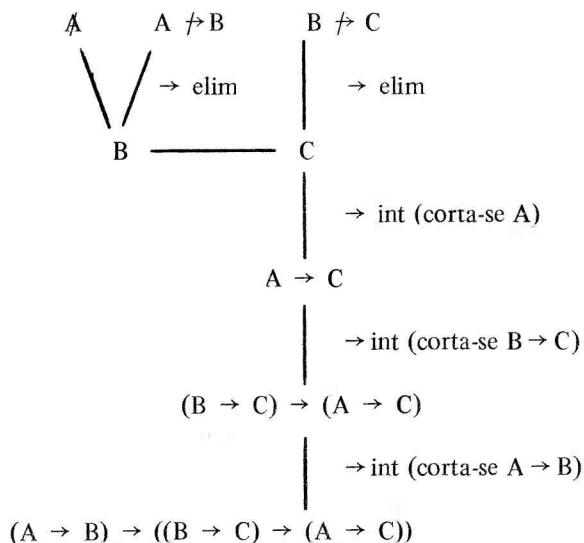
$A \to (A \vee B)$

$B$ (riscado)

v int

$A \vee B$

→ int

$B \to (A \vee B)$

7) $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$

É natural que estes exemplos que ilustram o mecanismo das deduções, pareçam, à primeira vista, algo arbitrários e artificiais. Porém, devemos nos convencer de que, ao contrário, os mesmos são naturais e refletem bem as propriedades informais dos conetivos. Por exemplo, as regras referentes a $\wedge$ mostram como este conetivo pode ser introduzido e como pode ser eliminado em um contexto; em outras palavras, como já observamos, elas conferem um significado operacional a $\wedge$ . E o mesmo ocorre com os outros conetivos. Os exemplos não constituem mais que aplicações das propriedades operacionais de tais operadores: decorrem de seus sentidos, fixados pelas regras.

A única maneira de se dominar a técnica da dedução lógica é por meio do exercício intenso. Não há normas para se construir deduções. Aqui se trata de desenvolver uma habilidade semelhante, para exemplificar, à de se dirigir automóvel: condição imprescindível para se conseguir bom rendimento adquire-se na prática, por tentativas e erros.

Vejamos mais exemplos de deduções:

8) $\vdash A \rightarrow A$

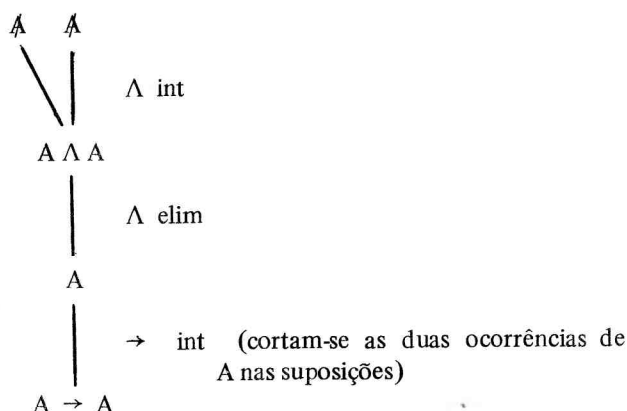
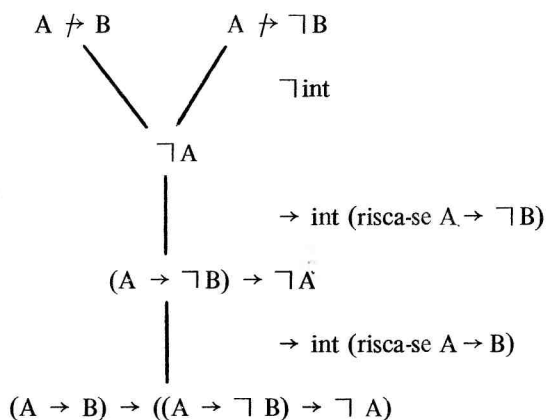
$\not{A} \quad \not{A}$

$\wedge$ int

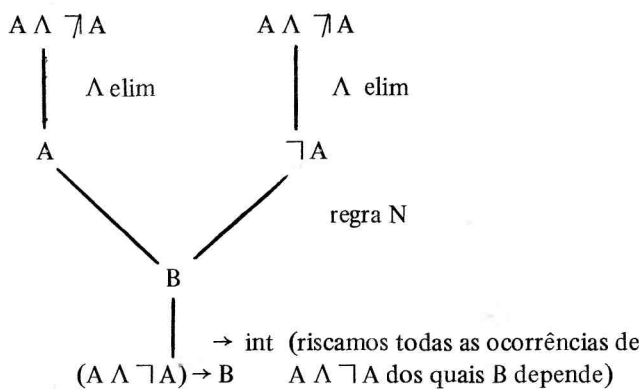
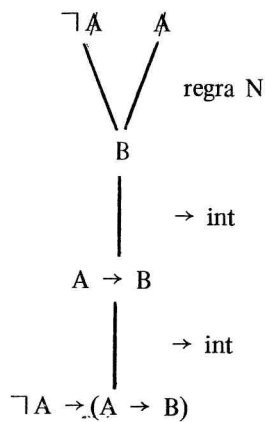
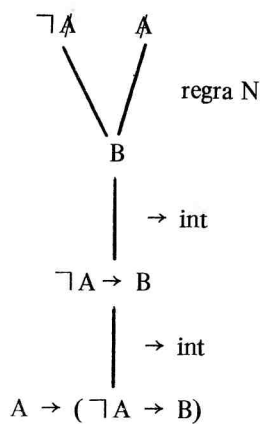
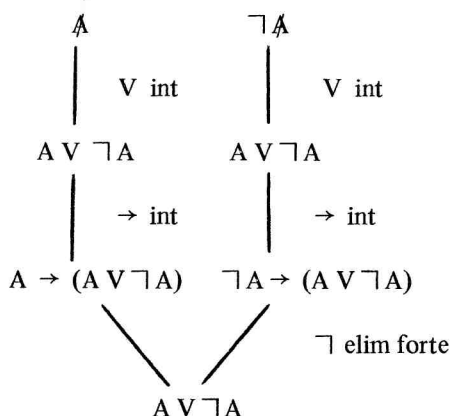
$A \wedge A$

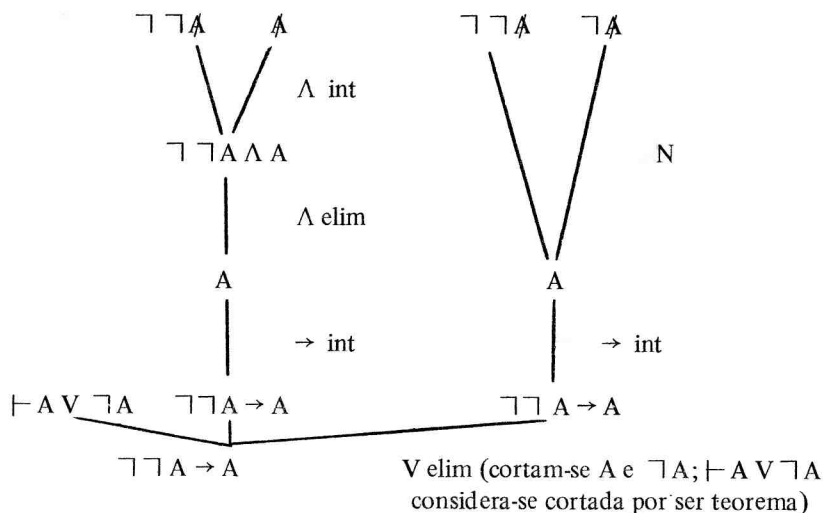
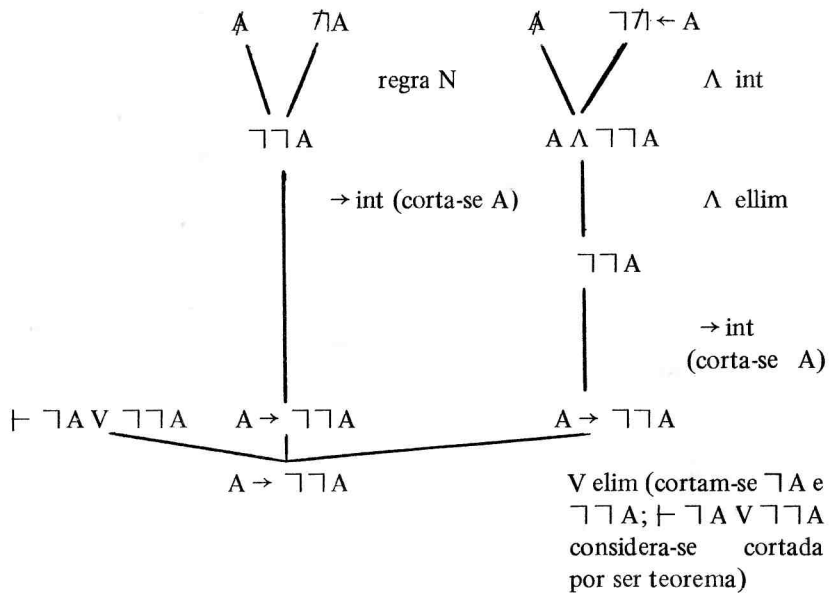
$\wedge$ elim

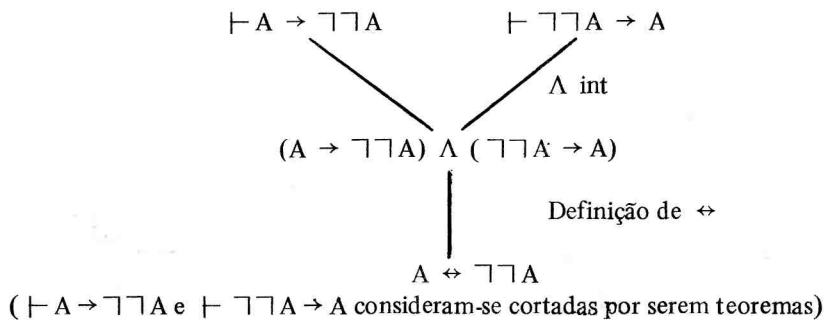
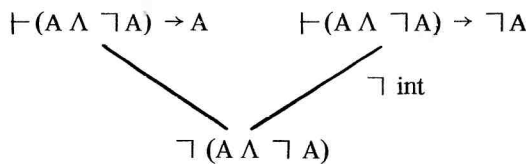
$A$

$\rightarrow$ int (cortam-se as duas ocorrências de A nas suposições)

$A \rightarrow A$

Observe-se que $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$ é uma lei lógica, um teorema lógico ou um princípio lógico; mas a regra de $\neg$ int não é lei lógica e sim uma regra logicamente válida. Deve-se ter sempre em mente a diferença entre leis (teoremas) lógicos e regras lógicas.

10) ⊢ (A ∧ ¬ A) → B

A ∧ ¬A
A ∧ ¬A
∧ elim
∧ elim
A
¬A
regra N
B
→ int (riscamos todas as ocorrências de
A ∧ ¬A dos quais B depende)
(A ∧ ¬A) → B

11) ⊢ ¬A → (A → B)
11')⊢ A → (¬A → B)
¬A
A
regra N
B
→ int
A → B
→ int
¬A → (A → B)
¬A
A
regra N
B
→ int
¬A → B
→ int
A → (¬A → B)

12) $\vdash A \vee \neg A$ (lei do terceiro excluído)

13) $\vdash \neg\neg A \rightarrow A$

Nesta demonstração vamos introduzir a abreviação seguinte, que será utilizada nas futuras deduções: sempre que se tiver demonstrado uma lei lógica, ela pode ser empregada nas deduções como suposição que se considera riscada. O leitor pode verificar, como exercício, que isto é artifício legítimo.

15) ⊢ A ↔ ¬¬A (lei da dupla negação)

( ⊢ A → ¬¬A e ⊢ ¬¬A → A consideram-se cortadas por serem teoremas)

16) ⊢ ¬(A Λ ¬A) (lei da contradição)

Exercício: Demonstrar que se tem:

1) $\vdash \neg(A \land B) \to (\neg A \lor \neg B)$
2) $\vdash (\neg A \lor \neg B) \to \neg(A \land B)$
3) $\vdash \neg(A \lor B) \to (\neg A \land \neg B)$
4) $\vdash (\neg A \land \neg B) \to \neg(A \lor B)$
5) $\vdash \neg(A \land B) \leftrightarrow (\neg A \lor \neg B)$
6) $\vdash \neg(A \lor B) \leftrightarrow (\neg A \land \neg B)$
7) $\vdash ((A \lor B) \land \neg A) \to B$
8) $\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$
9) $\vdash (\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$
10) $\vdash (A \to B) \leftrightarrow (\neg B \to \neg A)$
11) $\vdash (A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \leftrightarrow \neg B)$
12) $\vdash \neg(A \to B) \leftrightarrow (A \land \neg B)$
13) $\vdash (A \to B) \leftrightarrow \neg(A \land \neg B)$
14) $\vdash (A \to B) \leftrightarrow (\neg A \lor B)$
15) $\vdash A \lor (A \to B)$
16) $\vdash ((A \to B) \to A) \to A$
17) $\vdash (A \leftrightarrow B) \to ((A \land C) \leftrightarrow (B \land C))$
18) $\vdash (A \leftrightarrow B) \to ((A \lor C) \leftrightarrow (B \lor C))$
19) $\vdash (A \leftrightarrow B) \to ((A \to C) \leftrightarrow (B \to C))$
20) $\vdash (A \leftrightarrow B) \to ((C \to A) \leftrightarrow (C \to B))$
21) $\vdash ((A \land B) \land C) \leftrightarrow (A \land (B \land C))$
22) $\vdash ((A \lor B) \lor C) \leftrightarrow (A \lor (B \lor C))$
23) $\vdash (A \land (B \lor C)) \leftrightarrow ((A \land B) \lor (A \land C))$
24) $\vdash (A \lor (B \land C)) \leftrightarrow ((A \lor B) \land (A \lor C))$
25) $\vdash (A \to \neg A) \to \neg A$
26) $\vdash (\neg A \to A) \to A$
27) $\vdash (A \to B) \to (((A \to B) \to A) \to A)$

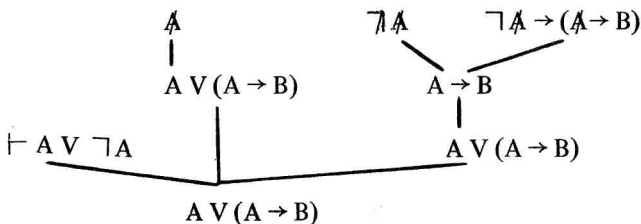
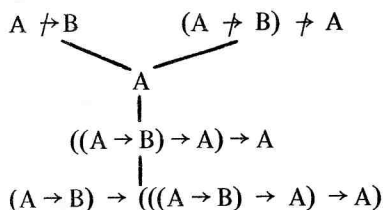
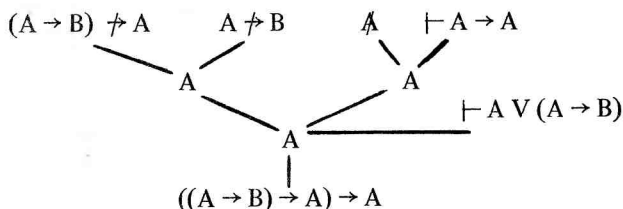
Indicamos como se fazem as demonstrações de três das leis acima. O leitor deve completar as demais.

15) $\vdash A \lor (A \to B)$

$$\not A \qquad\qquad \neg \not A \qquad \neg \not A \to (\not A \to B)$$

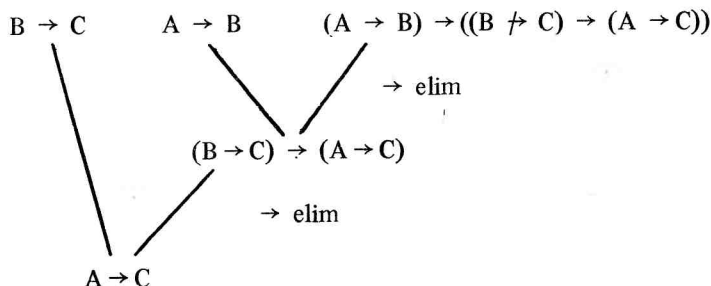
$$A \lor (A \to B) \qquad\qquad A \to B$$

$$\vdash A \lor \neg A \qquad\qquad A \lor (A \to B)$$

$$A \lor (A \to B)$$

As regras que foram formuladas anteriormente são as regras primitivas. A partir delas, podemos provar que outras regras podem ser utilizadas, pois suas aplicações podem ser substituídas por utilizações convenientes das regras primitivas. As novas regras, assim obtidas, chamam-se regras derivadas.

Assim, a regra

$$\frac{A \rightarrow B \qquad B \rightarrow C}{A \rightarrow C}$$ (silogismo hipotético)

é uma regra derivada, porquanto qualquer aplicação desta regra pode ser substituída por

**Exercício**: Mostrar que as regras abaixo são regras derivadas:

1) $\dfrac{A}{A}$

2) $\dfrac{A \vee B \quad \neg A}{B}$ (silogismo disjuntivo)

3) $\dfrac{A \rightarrow B \quad \neg B}{\neg A}$ (modus tollens)

4) $\dfrac{A \leftrightarrow B \quad A}{B}$

5) $\dfrac{A \leftrightarrow B \quad B}{A}$

6) $\dfrac{\neg\neg A}{A}$

7) $\dfrac{A}{\neg\neg A}$

Apresentaremos, a seguir, algumas definições e certas notações que se fazem necessárias para que seja possível enunciarmos as demais regras que completam a estrutura dedutiva de L. Estas regras que faltam referem-se aos quantificadores e ao símbolo $\varepsilon$ , e ao acrescentá-las passaremos do cálculo proposicional ao cálculo de predicados de primeira ordem com igualdade e o símbolo $\varepsilon$ (ou lógica elementar com o símbolo em apreço):

Ao escrevermos expressões bem formadas, sempre ficará pressuposto que os símbolos metalingüísticos usados possuem as categorias sintáticas definidas pelo contexto.

**Definição 1.2.1.** *(Ocorrência ligada de uma variável)*

Uma ocorrência de uma variável numa expressão bem formada diz-se ligada se estiver afetada por um quantificador ou por $\varepsilon$.

Em $\forall x(Pxy \vee \neg Qx)$ as três ocorrências de x estão ligadas, pois se encontram afetadas pelo quantificador.

Em $\exists xPxy \vee \neg Qx$ as duas primeiras ocorrências da variável x estão ligadas, mas a última não está.

No termo $\varepsilon xPxy$, as duas ocorrências de x estão ligadas, mas a de y não está.

**Definição 1.2.2** *(Ocorrência livre de uma variável)*
Uma ocorrência de variável que não for ligada, diz-se livre.
A variável x está livre na fórmula $Px \vee \neg Px$. A variável y tem ocorrência livre no termo $\varepsilon xPxy$.

**Definição 1.2.3.** (F(x, y, z, . . .))
F(x, y, z, . . .) designará uma expressão bem formada na qual as variáveis x, y, z, . . . podem ocorrer livres (isto é, podem ter ocorrências livres).

P sendo um símbolo de predicados de grau 2 e x uma variável, então Pxx é uma fórmula que se pode representar por F(x). Também Pxy e Pyz podem ser representados por F(x). O caso em que F(x) representa Pyz chama a atenção para o fato de que F(x) é uma expressão na qual x *pode* ocorrer livre, o que não significa que *deve* ocorrer livre sempre.

**Definição 1.2.4.** (F(t))
Seja F(x) uma expressão bem formada e t um termo. Então, F(t) representa a expressão que se obtém de F(x), substituindo-se as ocorrências livres de x por t. Análoga definição vale para o caso de expressões do tipo F(x, y, z, . . .) e termos $t_1, t_2, t_3 \ldots$ Exemplo:

| | |
|---|---|
| F(x): | $\forall y\,(Pxy \wedge Qx)$ |
| t: | z |
| F(t): | $\forall y\,(Pzy \wedge Qz)$ |

Outro exemplo:

| | |
|---|---|
| F(x): | $\varepsilon u\, Pux$ |
| t: | y |
| F(y): | $\varepsilon u Puy$ |

**Definição 1.2.5.** *(Confusão de variáveis)*
Seja F(x) uma expressão bem formada e t um termo. Na substituição de x por t em F(x) diz-se que não há confusão de variáveis se em F(t) nenhuma variável livre ***em t*** torna-se ligada. Caso contrário, diz-se que há confusão de variáveis. Exemplos:

$F(x)$: $\forall y\,(Pxy \lor \neg Qxy)$
$t$: $y$
$f(t)$: $\forall y\,(Pyy \lor \neg Qyy)$

Há aqui confusão de variáveis: pois a variável y, ao ser colocada no lugar de x, nas duas ocorrências, ficou ligada.

$F(x)$: $\forall y\,(Pyx \lor \neg Qxy)$
$t$: $\varepsilon uQyu$
$F(t)$: $\forall y\,(Py\varepsilon uQyu \lor \neg Q\varepsilon uQyuy)$

Neste exemplo também há confusão de variáveis.

$F(x)$: $\forall y(Pyx \lor \neg Qxy)$
$t$: $z$
$F(t)$: $\forall y\,(Pyz \lor Qzy)$

Aqui não há confusão de variáveis.

**Definição 1.2.6** *(Expressão fechada)*

Uma expressão que não contenha variáveis com ocorrências livres chama-se *fechada*. Um termo fechado denomina-se termo *constante* e uma fórmula fechada, *sentença.* Toda constante individual é um termo fechado ou termo constante. Facilmente se vê que se t for um termo fechado e F(x) uma expressão bem formada, em F(t) não há nunca confusão de variáveis.

**Definição 1.2.7** *(Subfórmulas e subtermos)*

As fórmulas e termos são construídos passo a passo pelas cláusulas da Definição 1.2. As fórmulas e os termos que são necessários construir para se obter uma fórmula F chamam-se, respectivamente, subfórmulas e subtermos de F. Por extensão, F é também subfórmula de F.

**Definição 1.2.8** *(Fórmulas congruentes)*

Sejam F e G duas fórmulas satisfazendo as seguintes condições:
1) Elas têm o mesmo número k de ocorrência de símbolos; 2) Se o símbolo de ordem i de F não é uma variável, então o símbolo de ordem i de F e de G são os mesmos; 3) Se o símbolo de ordem i de F é uma variável livre, então o símbolo de ordem i de G é a mesma variável livre;4) Se o símbolo de ordem i de F é uma variável ligada pelo j-ésimo quantificador

(símbolo $\varepsilon$) de F, então o i-ésimo símbolo de G também é uma variável, a mesma ou não da ocorrência correspondente de F, ligada pelo j-ésimo quantificador (símbolo $\varepsilon$) de G. Naturalmente, $0 < i \leqslant k$ e $0 < j \leqslant k$. Nestas condições, seguindo S.C. Kleene, diremos que F e G são fórmulas congruentes.

Em linguagem informal, duas fórmulas são congruentes quando podem diferir apenas pelas suas variáveis ligadas, e ocorrências correspondentes de variáveis ligadas são ligadas por quantificadores, ou pelo símbolo $\varepsilon$, correspondentes.

Fórmulas congruentes possuem o mesmo sentido, como se constata informalmente. Assim,

$$\forall x\,(Px \vee \neg Px),$$

que é uma formulação quantificacional do terceiro excluído, se escrita

$$\forall y\,(Py \vee \neg Py)$$

quer dizer exatamente a mesma coisa.

Analogamente,

$$\forall x\, \exists y\, Pxy \qquad \text{e} \qquad \forall z\, \exists x\, Pzx$$

significam o mesmo (se Pab expressa a proposição 'a é menor do que b', a e b sendo números naturais, então as duas fórmulas acima dizem o mesmo: "Para todo número natural, existe outro que é maior do que o primeiro").

Finalmente, podemos formular as regras que completam a estrutura dedutiva de L, que são as seguintes:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Particularização universal | $\dfrac{\forall x A(x)}{A(t)}$ | elim | Onde A(x) é uma fórmula tal que o termo t pode ser substituído no lugar de x, sem confusão de variáveis. |
| Generalização existencial | $\dfrac{A(t)}{\exists x A(x)}$ | $\exists$elim | Mesma restrição que a da regra anterior. |
| Particularização existencial | $\dfrac{\exists x A(x)}{A(\varepsilon x A(x))}$ | $\exists$elim | Onde não há confusão de variáveis. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Generalização universal | $\dfrac{A(\varepsilon x \neg A(x))}{\forall x A(x)}$ | $\forall$int | Onde não há confusão de variáveis |
| Congruência | $\dfrac{A}{A^*}$ | Con | Onde $A^*$ é qualquer fórmula congruente com A. É a regra da congruência. |
| Variação | $\dfrac{A(x)}{A(t)}$ | Var | Desde que x não figure livre em nenhuma suposição não riscada da dedução em que for aplicada e t não cause confusão de variáveis. É a regra da variação. |
| Lei da Identidade | $\dfrac{A}{\forall x(x = x)}$ | $=_1$ | Lei da identidade ou da reflexividade da igualdade. |
| Lei de Leibniz | $\dfrac{x = y \quad A(x)}{A(j)}$ | $=_2$ | x e y são variáveis e supõem-se que não há confusão de variáveis. É a lei de Leibniz ou da substitutividade da igualdade. |
| $\dfrac{\forall x(Ax) \leftrightarrow B(x))}{\varepsilon x A(x) = \varepsilon x B(x)}$ | | $\varepsilon=$ | |

Vamos tecer alguns comentários sobre as oito regras formuladas.

**$\forall$elim:** Ela nos diz que se uma fórmula é satisfeita por todos os objetos do domínio de que fala a linguagem, então a fórmula é satisfeita, em especial pelo objeto denotado por t. Se t contiver variáveis livres, não deve haver confusão, pois, em caso contrário, a justificação intuitiva da regra perde seu significado. Com efeito, seja a fórmula $\forall x \exists y Pxy$, onde Pxy se refere a números naturais e significa 'x é menor do que y'. Então, $\forall x \exists y Pxy$ afirma: "Para todo número existe outro que é maior do que ele", sendo verdadeira. Mas no caso de t ser y, $\forall x \exists y Pxy$ dá origem, por $\forall$elim, à fórmula $\exists y Pyy$, que é falsa segundo a interpretação em tela, pois esta última sentença diz que "Existe um número que é menor do que ele mesmo".

**$\exists$int:** Esta regra afirma que se A(t) é verdadeira, então também o é $\exists x A(x)$; se t satisfaz A(x), então existe um objeto que a satifaz. A razão da restrição é a mesma da regra anterior.

**∃elim:** Já vimos que o significado intuitivo do termo $\varepsilon xA(x)$ é o seguinte: $\varepsilon xA(x)$ denota um objeto qualquer, embora fixado, que satisfaça A(x), se existir pelo menos um objeto que satisfaz A(x), e um objeto fixo arbitrário caso não haja objeto algum que satisfaça A(x). A razão da restrição é clara.

**∀int:** $\varepsilon x \neg A(x)$ representa um objeto que satisfaz $\neg A(x)$, caso haja um, e um objeto arbitrário qualquer caso não exista objeto que satisfaça $\neg A(x)$. Então, se $\varepsilon x \neg A(x)$ satisfizer A(x), isto é se $A(\varepsilon x \neg A(x))$, $\varepsilon x \neg A(x)$ não pode satisfazer $\neg A(x)$, e, por conseguinte, nenhum objeto satisfaz $\neg A(x)$: logo, qualquer objeto tem que satisfazer A(x). Isto justifica a regra. O motivo da restrição é análogo aos das regras precedentes.

**Con:** Fórmulas congruentes têm o mesmo sentido, como já discutimos. Logo, se A for verdadeira, também o será qualquer fórmula que lhe seja congruente. Fórmulas congruentes são equivalentes. Esta regra é importante, pois praticamente elimina as restrições das regras anteriores, colocando-se no lugar de uma fórmula uma outra conveniente que lhe seja congruente.

**Var:** As variáveis livres das fórmulas que figuram como suposições em uma dedução devem funcionar como parâmetros, isto é, como constantes indeterminadas, cujas denotações, embora fixas, não foram explicitadas. Logo, se A(x) ocorrer como suposição em uma dedução, não se pode substituir essa variável por um termo t qualquer. Vejamos um exemplo. Seja a dedução:

A restrição foi desrespeitada no primeiro passo, obtendo-se a fórmula $A(x) \rightarrow \forall x A(x)$, que seria, então, uma lei lógica. Mas ela nos afirma que se um objeto qualquer satisfizer $A(x)$, então todo objeto satisfaz $A(x)$, o que é evidentemente falso.

Porém, se x não ocorrer livre em nenhuma suposição da dedução, $A(x)$ é satisfeita por um objeto totalmente arbitrário e, conseqüentemente, por t (caso não haja confusão de variáveis).

$=_1$ : É a lei da identidade. $\forall x(x = x)$ pode ser deduzida de qualquer fórmula A, pois $\forall x(x = x)$ é universalmente verdadeira (vale para todos os objetos).

$=_2$ : Esta regra expressa a lei de Leibniz se o objeto x for igual a y, isto é, se x e y denotarem o mesmo objeto, então tudo que for verdadeiro de x, será também verdadeiro de y. O motivo da restrição é óbvio.

$\varepsilon =$ : Serve para fazer que a fórmulas equivalentes $A(x)$ e $B(x)$ corresponda o mesmo objeto, denotado por $\varepsilon x A(x)$ ou $\varepsilon x B(x)$.

Façamos algumas deduções lançando mão de todas as regras até agora formuladas, e que caracterizam a lógica elementar com o símbolo $\varepsilon$.

1) $\vdash \forall x A(x) \rightarrow A(t)$, onde t é livre para x em $A(x)$, isto é, não há confusão de variáveis:

$$\forall x \not{A}(x)$$
$$| \quad \forall \text{elim}$$
$$A(t)$$
$$| \quad \rightarrow \text{int}$$
$$\forall x A(x) \rightarrow A(t)$$

2) $\vdash A(t) \rightarrow \exists x A(x)$, com as restrições da demonstração precedente (daqui para a frente não tornaremos explícitas as restrições nas deduções).

$$A(\not{t})$$
$$| \quad \exists \text{int}$$
$$\exists x A(x)$$
$$| \quad \rightarrow \text{int}$$
$$A(t) \rightarrow \exists x A(x)$$

3) $\vdash \exists x A(x) \rightarrow A(\varepsilon x A(x))$

$$\begin{array}{c} \exists x A(x) \\ | \quad \exists\text{elim} \\ A(\varepsilon x A(x)) \\ | \quad \rightarrow \text{int} \\ \exists x A(x) \rightarrow A(\varepsilon x A(x)) \end{array}$$

4) $\vdash \exists x A(x) \leftrightarrow A(\varepsilon x A(x))$

Consequência de 2, 3 e da definição de $\leftrightarrow$

5) $\vdash \forall x A(x) \rightarrow A(\varepsilon x \neg A(x))$

$$\begin{array}{c} \forall x A(x) \\ | \quad \forall\text{elim} \\ A(\varepsilon x \neg A(x)) \\ | \quad \rightarrow \text{int} \\ \forall x A(x) \rightarrow A(\varepsilon x \neg A(x)) \end{array}$$

6) $\vdash A(\varepsilon x \neg A(x)) \rightarrow \forall x A(x)$

$$\begin{array}{c} A(\varepsilon x \neg A(x)) \\ | \quad \forall\text{int} \\ \forall x A(x) \\ | \quad \rightarrow \text{int} \\ A(\varepsilon x \neg A(x)) \rightarrow \forall x A(x) \end{array}$$

7) $\vdash \forall x A(x) \leftrightarrow A(\varepsilon x \neg A(x))$

Consequência de 5, 6 e da definição de $\leftrightarrow$

8) $\vdash \exists x A(x) \leftrightarrow A(x)$ se x não ocorre livre em A(x).

8.1) $\vdash \exists x A(x) \rightarrow A(x)$

$\exists x A(x)$

| $\exists$elim

$A(x)$

| $\rightarrow$ int

$\exists x A(x) \rightarrow A(x)$

Desde que x não figura livre em A(x), $A(\varepsilon x A(x))$ é A(x)).

8.2) $\vdash A(x) \rightarrow \exists x A(x)$

(A restrição é satisfeita, pois x não é livre em A(x). Além disso, $A(\varepsilon x A(x))$ é A(x)).

8 decorre de 8.1 e 8.2.

**Exercícios:** Provar que

1) $\vdash \exists x \exists y A(x, y) \leftrightarrow \exists y \exists x A(x, y)$
2) $\vdash \forall x \forall y A(x, y) \leftrightarrow \forall y \forall x A(x, y)$
3) $\vdash \exists x \forall y A(x, y) \rightarrow \forall y \exists x A(x, y)$
4) $\vdash \forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (\forall x A \rightarrow \forall x B)$ (Não é preciso explicitar, sempre, que x, ou outra variável qualquer, pode figurar livre em uma fórmula.)
5) $\vdash \forall x A \leftrightarrow \neg \exists x \neg A$
6) $\vdash \exists x A \leftrightarrow \neg \forall x \neg A$
7) $\vdash \forall x \neg A \leftrightarrow \neg \exists x A$
8) $\vdash \exists x \neg A \leftrightarrow \neg \forall x A$
9) $\vdash \forall x(A \land B) \leftrightarrow (\forall x A \land \forall x B)$
10) $\vdash \exists x(A \lor B) \leftrightarrow \exists x A \lor \exists x B)$

Facilmente se comprova que as seguintes regras são regras derivadas:

$$\frac{A(x) \rightarrow B}{\exists x A(x) \rightarrow B}$$

Onde x não figura livre em nenhuma suposição e B não contém x livre.

$$\frac{A \rightarrow B(x)}{A \rightarrow \forall x B(x)}$$

Restrição análoga à anterior.

$$\frac{A(x)}{\forall x A(x)}$$

A variável x não ocorre livre em nenhuma hipótese.

**Exercícios:** Demonstrar que as fórmulas dos tipos seguintes são leis lógicas:

1) $t_1 = t_2 \rightarrow (A(t_1) \rightarrow A(t_2))$
2) $t_1 = t_2 \rightarrow t_2 = t_1$
3) $t_1 = t_1$
4) $(t_1 = t_2 \wedge t_2 = t_3) \rightarrow t_1 = t_3$

O seguinte resultado, que batizaremos de *"Teorema estrutural"*, é de sua importância:

**Teorema 1.2.1** (*Teorema estrutural*) – Quaisquer que sejam as fórmulas A, B, C e F(x), o termo t e o conjunto de fórmulas $\Gamma$, tem-se, com restrições patentes:

| | |
|---|---|
| Se $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$, então $\Gamma \vdash A \rightarrow B$ | $\rightarrow$ int |
| $\{A, A \rightarrow B\} \vdash B$ | $\rightarrow$ elim |
| $\{A, B\} \vdash A \wedge B$ | $\wedge$ int |
| $\{A \wedge B\} \vdash A$<br>$\{A \wedge B\} \vdash B$ | $\wedge$ elim |
| $\{A\} \vdash A \vee B$<br>$\{B\} \vdash A \vee B$ | V int |
| Se $\Gamma \cup \{A\} \vdash C$ e $\Gamma \cup \{B\} \vdash C$,<br>então $\Gamma \cup \{A \vee B\} \vdash C$ | V elim |

| | |
|---|---|
| Se $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$ e $\Gamma \cup \{A\} \vdash \neg B$, então $\Gamma \vdash \neg A$ | $\neg$ int |
| $\{A, \neg A\} \vdash B$ | $\neg$ elim fraca |
| Se $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$ e $\Gamma \cup \{\neg A\} \vdash B$, então $\Gamma \vdash B$ | $\neg$ elim forte |
| $\{A(t)\} \vdash \exists x A(x)$ | $\exists$ int |
| $\{A(\varepsilon x \neg A(x))\} \vdash \forall x A(x)$ | $\forall$ int |
| $\{\exists x A(x)\} \vdash A(\varepsilon x A(x))$ | $\exists$ elim |
| $\{\forall x A(x)\} \vdash A(t)$ | $\forall$ elim |
| $\{A\} \vdash A^*$ | Con |
| Se $\Gamma \vdash A(x)$, então $\Gamma \vdash A(t)$ | Var |
| $\vdash \forall x(x = x)$ | $=_1$ |
| $\{x = y, A(x)\} \vdash A(y)$ | $=_2$ |
| $\{\forall x(F(x) \leftrightarrow G(x))\} \vdash \varepsilon x F(x) = \varepsilon x G(x)$ | $\varepsilon =$ |

A prova deste teorema é imediata, pois ele apenas enuncia as regras de outra maneira. No entanto, a aplicação das regras na forma desse teorema facilita a manipulação das mesmas.

Para facilitar, não escrevemos mais os colchetes que indicam conjunto à esquerda do símbolo $\vdash$ de dedução.

**Exemplos:**

1) $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \vee C) \rightarrow (D \vee C))$

| | |
|---|---|
| 1) $A \rightarrow B, A \vdash B$ | $\rightarrow$ elim |
| 2) $B \vdash B \vee C$ | $\vee$ int |
| 3) $A \rightarrow B, A \vdash B \vee C$ | De 1 e 2 |
| 4) $A \rightarrow B, C \vdash B \vee C$ | $\vee$ int |
| 5) $A \rightarrow B, A \vee C \vdash B \vee C$ | $\vee$ elim, dados 3 e 4 |
| 6) $A \rightarrow B \vdash (A \vee C \rightarrow B \vee C)$ | $\vee$ int |
| 7) $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \vee C) \rightarrow (B \vee C))$ | $\rightarrow$ int |

2) $\vdash \exists x A(x) \rightarrow \neg \forall x \neg A(x)$

Denotemos, para abreviar, $\varepsilon x A(x)$ por t.

| | |
|---|---|
| 1) $A(t), \forall x \neg A(x) \vdash \neg A(t)$ | $\forall$elim |
| 2) $A(t), \forall x \neg A(x) \vdash A(t)$ | Propriedade de $\vdash$ |
| 3) $A(t) \vdash \neg \forall x \neg A(x)$ | $\neg$ int, dados 1 e 2 |
| 4) $\exists x A(x) \vdash A(t)$ | $\exists$elim |
| 5) $\exists x A(x) \vdash \neg \forall x \neg A(x)$ | De 3 e 4 |
| 6) $\vdash \exists x A(x) \rightarrow \neg \forall x \neg A(x)$ | $\rightarrow$ int |

**Exercício:** Mostrar que a seguinte regra pode ser empregada como regra derivada:

Se $\Gamma$ , $A(x) \vdash C$ e x não figura livre em C, então $\Gamma, \exists x A(x) \vdash C$. (Esta regra é conhecida como regra da constante auxiliar (N. Bourbaki) ou regra derivada de $\exists$ eliminação.)

Observemos que as regras Var e $=_1$ não são estritamente necessárias, já que podem ser derivadas das outras. Assim, $=_1$ pode ser derivada como se segue:

Tem-se em L: $\vdash \forall x(A \leftrightarrow A)$ e, em especial, $\vdash \forall x(\neg x = x \leftrightarrow \neg x = x)$, como facilmente se constata. Logo, por $\varepsilon =$, advém que $\vdash (\varepsilon x \neg x = x) = (\varepsilon x \neg x = x)$, e, por $\forall$int, que $\vdash \forall x(x = x)$, ou seja, $=_1$.

A prova de que Var constitui regra derivada é mais complexa. Também é complicado demonstrar que as regras restantes são todas imprescindíveis: nenhuma pode ser derivada das demais.

**Exercício:** Mostrar que:

1) Se A(x) e A(y) forem duas fórmulas tais que a primeira difere da segunda unicamente por ter x livre onde a segunda tem y e reciprocamente, então: $\vdash \varepsilon x A(x) = \varepsilon y A(y)$

2) $\exists x A(x) \rightarrow \forall x(x = \varepsilon x A(x) \rightarrow A(x))$

## CAPÍTULO 2

# A SEMÂNTICA DE L

Até agora falamos de verdade de uma sentença e de denotação de um termo, sem nos preocuparmos em definir essas palavras de modo rigoroso. Equivalentemente, tratamos da sintaxe de L de modo rigoroso, deixando de lado sua contraparte semântica.

Na sintaxe de uma linguagem nós a estudamos como puro jogo gráfico: os objetos ou estados de coisas aos quais a linguagem se refere não são tomados em conta na sintaxe. Mas a semântica de uma linguagem, por seu turno, trata precisamente das interconexões entre a mesma e aquilo a que ela se refere.

A semântica, como a entendemos aqui, foi criação de A. Tarski; enquanto que a sintaxe se originou das indagações de D. Hilbert e sua escola, tendo sido sistematizada por R. Carnap.

A linguagem L foi elaborada para se falar de indivíduos e estados de coisa (fatos). Logo, só se pode referir à verdade (ou falsidade) de uma sentença de L ou de um termo fechado dessa linguagem, se a tivermos interpretado.

Interpretar uma linguagem é, em última análise, relacioná-la com certo tipo de estrutura. Assim, se desejamos interpretar L, necessitamos de um domínio do conhecimento $\Delta$, explicitando o objeto de $\Delta$ que cada constante de L denota, o predicado a que cada símbolo de predicado de L se refere, etc. Como a finalidade desta obra é a lógica elementar, não vamos interpretar L em nenhum domínio de conhecimento, científico ou não, real, dado. Ao contrário, daremos uma definição abstrata e geral das estruturas nas quais interpretaremos L, desenvolvendo um estudo lógico-matemático. Porém, é preciso que fique claro que nossas definições constituem um equacionamento abstrato e formal das situações concretas em que uma linguagem se refere a situações reais.

Para interpretarmos L, partimos de um conjunto D, não vazio, que contém os objetos (indivíduos) nos quais estamos interessados. Estes objetos possuem propriedades (relações monádicas) e mantém relações entre si. Ademais, em D há determinados objetos distinguidos, que convém denotar pelas constantes de L. A linguagem L está interpretada numa estrutura desse tipo, quando a cada um de seus símbolos de predicado de grau n associamos uma relação de mesmo grau entre os objetos de D e fazemos corresponder a cada constante de L um objeto distinguido de D. Finalmente, para se interpretar o símbolo $\varepsilon$, é preciso que se dê, também, uma função de escolha, que associa a cada subconjunto K de D um elemento de D que pertence

a K, se este for não-vazio, e um objeto fixo qualquer de D, se K for vazio. Somente por meio de uma função de escolha é que se pode definir a denotação de um termo de L que contenha o símbolo $\varepsilon$.

Geralmente os elementos distinguidos de D são designados assim: $a_0, a_1, \ldots, a_n$, quando há apenas um conjunto finito deles, ou assim $a_0, a_1, a_2, \ldots$, quando existem tantos elementos quanto forem os números naturais. Se representarmos o conjunto dos índices de $a_0, a_1, \ldots, a_n$ por $N_n$ e o conjunto dos números naturais por N, é mais conveniente escrevermos a seqüência $a_0, a_1, \ldots, a_n$ na forma $(a_j)_{j \in N_n}$ e a seqüência infinita $a_0, a_1, a_2, \ldots$ na forma $(a_j)_{j \in N}$. De modo geral, se tivermos uma coleção de objetos indexados pelo conjunto J, isto é, J é o conjunto de seus índices, convém representar sua coleção sob a forma de família, deste modo: $(a_j)_{j \in J}$.

## 2.1 A Semântica da Lógica Elementar

Nesta secção trataremos da semântica de L de modo rigoroso, precisando as idéias intuitivas e informais precedentes.

O conceito de ***estrutura semântica*** ou, simplesmente, ***estrutura*** é básico. Uma estrutura é um sistema

$\mathcal{A} = \langle D, (R_i)_{i \in I}, (a_j)_{j \in J}, \mathbf{e} \rangle$, onde D é um conjunto não vazio, o domínio ou universo de $\mathcal{A}$, $(R_i)_{i \in I}$ uma família de predicados ou relações distinguidos de D e **e** uma função de escolha para D (**e** associa a cada subconjunto não vazio de D um elemento que pertence a este subconjunto, e ao conjunto vazio, que é também subconjunto de D, um elemento fixo, qualquer, de D).

Qualquer domínio do conhecimento, empírico ou não, pode ser concebido como uma estrutura. Por exemplo, a aritmética elementar constitui estrutura desse tipo: D é o conjunto dos números naturais, $\{0, 1, 2, \ldots\}$; as relações $R_i$, $i \in I$, para I conveniente, englobam relações tais como "menor do que", "é divisor de ", etc., bem como operações entre números, que se reduzam a relações; há elementos distinguidos, como, por exemplo, o zero (0), e não há dificuldade de se introduzir uma função de escolha, definida para os subconjuntos do conjunto dos naturais.

Admitiremos daqui para a frente, implicitamente, que toda estrutura ventilada é ***compatível*** com L, isto é, que a família de símbolos de predicados de L tem o mesmo conjunto de índices da estrutura; um símbolo de predicado $P_i$ de L e a relação $R_i$ da estrutura, que se correspondem, possuem o mesmo grau, e que a família de constantes de L e a dos elementos distinguidos da estrutura têm o mesmo conjunto de índices.

**Definição 2.1.1** *(Interpretação)* – Seja $A$ uma estrutura compatível com L. Uma interpretação é uma função **i**, que associa a cada símbolo de predicado de L uma relação de mesmo grau em $A$ (salvo aviso expresso em contrário, admitiremos que se correspondem por **i** símbolos de predicados e relações de mesmo índice) e a cada constante um objeto distinguido de $A$ (convenção análoga ao caso de correspondência entre símbolos de predicados e relações).

**Definição 2.1.2** *(Função auxiliar)* – Uma função auxiliar de L em $A$ é uma função que associa a cada variável de L um elemento de $A$ (do domínio de $A$). (Necessitamos dessas funções, pois vamos definir verdade, denotação, etc. de expressões bem formadas quaisquer de L, que contêm variáveis livres.)

**Definição 2.1.3** *(Valoração e denotação)* – Sejam **i** e **f** respectivamente uma interpretação e uma função auxiliar de L em $A$, e F e t respectivamente uma fórmula e um termo de L. Isto posto, designaremos por $\mathbf{v_i^f}$ uma função das fórmulas em $\{0, 1\}$ e por $\mathbf{d_i^f}$ outra função do conjunção dos termos em D, denominadas de valoração, segundo **i** e **f**, e denotação, segundo **i** e **f**, definidas pelas seguintes cláusulas:

1) Se t for constante de L, então $d_i^f(t) = \mathbf{i(t)}$, se t for uma variável, $d_i^f(t) = f(t)$.

2) Seja F da forma $Pt_1, t_2, \ldots t_n$. $v_i^f(F) = 1$ se os objetos $d_i^f(t_1)$, $d_i^f(t_2), \ldots, d_i^f(t_n)$ estiverem entre si na relação i(P) (evidentemente supomos que P é um símbolo de predicados e $t_1, t_2, \ldots, t_n$ são n termos); em caso contrário, $v_i^f(F) = 0$. Se F for $t_1 = t_2$, então $v_i^f(F) = 1$ se $d_i^f(t_1) = d_i^f(t_2)$, e $v_i^f(F) = 0$ se isto não acontecer.

3) F é da forma $A \to B$: $v_i^f(F) = 1$ se $v_i^f(A) = 0$ ou $v_i^f(B) = 1$, em caso contrário, $v_i^f(F) = 0$;
F é da forma $A \wedge B$: $v_i^f(F) = 1$ se $v_i^f(A) = v_i^f(B) = 1$, e $v_i^f(F) = 0$ em caso contrário
F é $A \vee B$: $v_i^f(F) = 1$ se e só se $v_i^f(A) = 1$ ou $v_i^f(B) = 1$;
F é $\neg A$: $v_i^f(F) = 1$ se $v_i^f(A) = 0$ e $v_i^f(F) = 0$ se $v_i^f(A) = 1$.

4) Seja t o termo $\varepsilon xA(x)$. Designemos por K o conjunto de todos os objetos tais que $v_i^{f'}(A(x)) = 1$, segundo i e f', onde f' é uma função auxiliar que pode diferir de f apenas na variável x. Então, $d_i^f(t)$ é o elemento que a função escolha **e** associa a K.

5) Seja F a fórmula $\forall xA(x)$ $v_i^f(F) = 1$ se, para toda função auxiliar, nas condições da cláusula precedente, tivermos: $v_i^{f'}(A(x)) = 1$; de outro modo, $v_i^f(F) = 0$. Seja agora F a fórmula $\exists xA(x)$; $v_i^f(F) = 1$ caso exista uma função auxiliar, nas condições precedentes, tal que $v_i^{f'}(A(x)) = 1$; em caso contrário, $v_i^f(F) = 0$.

6) As funções $v_i^f$ e $d_i^f$ são dadas apenas pelas cláusulas precedentes.

A definição acima, como o leitor pode concluir após alguma reflexão, caracteriza, de modo formal e rigoroso, os conceitos de *verdade* de uma fórmula e de *denotação* de um termo segundo uma interpretação e uma função auxiliar. No caso de fórmulas e termos fechados, a verdade e a denotação não dependem da função auxiliar, mas só da interpretação.

**Definição 2.1.4** *(Conseqüência semântica)* – Seja $\Gamma$ um conjunto de fórmulas e F uma fórmula. Se para qualquer estrutura $A$, qualquer interpretação **i** e qualquer função auxiliar f, $v_i^f(F) = 1$, sempre que $v_i^f(G) = 1$ para todo G em $\Gamma$, diz-se que F é conseqüência semântica de $\Gamma$, e escreve-se $\Gamma \models F$. No caso em que $\Gamma$ for vazio, escreve-se $\models F$, e F se denomina *logicamente válida* ou, simplesmente, *válida*.

Facilmente se provam as seguintes proposições:

**Teorema 2.1.1** – Se definirmos tautologia como é usual, por meio de quadros de valores, tem-se: se F for uma tautologia (em certas subfórmulas que a compõem, então $\models F$.

**Teorema 2.1.2** – Todas as regras sintáticas do Teorema Estrutural do Capítulo anterior permanecem verdadeiras se substituirmos o sinal $\vdash$, de conseqüência sintática, pelo sinal $\models$ de conseqüência semântica.

Há, pois, um paralelismo entre a sintaxe de L e sua semântica, que conecta $\vdash$ e $\models$. De fato, a sintaxe e a semântica de L se relacionam intimamente, como evidencia o seguinte *teorema da correção:*

**Teorema 2.1.3** (*da Correção*) – Se $\Gamma \vdash F$, então $\Gamma \models F$.

**Demonstração** (esboço) – Se $\Gamma \vdash F$ e a dedução não contiver nenhuma aplicação de regra, então F pertence a $\Gamma$, e evidentemente se tem $\Gamma \models F$.

Admitamos, então, que a dedução encerre somente uma aplicação de regra. A regra em apreço não pode ser nem $\rightarrow$ int nem V elim, que pressupõem que já se haja feito aplicações de regras antes. Analisando-se, então, cada uma das regras possíveis, contata-se que o teorema continua válido. Com efeito, seja F a fórmula $A \wedge B$, obtida de A e B por $\wedge$ int. Logo, A e B estão em $\Gamma$ e F é $A \wedge B$, donde se conclui facilmente que $\Gamma \models F$. Analogamente se procede com relação às outras regras.

Aceitemos, pois, que o teorema vale para deduções em que há um número k de aplicações de regras, onde $k < n$, e provemos o teorema para

o caso em que há n aplicações. Precisamos levar em conta todas as regras. Trataremos, apenas, da regra $\rightarrow$ int.

Se F é $A \rightarrow B$ e foi obtida por $\rightarrow$ int, então tem-se: $\Gamma \vdash B$ e $\Gamma$ é igual a $\Delta \cup \{A\}$. Assim, de $\Gamma \models B$, que vale, por hipótese, devemos provar que $\Delta \models A \rightarrow B$, se riscarmos A, ou $\Delta \cup \{A\} \models A \rightarrow B$, em hipótese contrária. Todavia, pela definição de verdade, facilmente se comprova isso.

Por conseguinte, o teorema fica provado.

**Exercício 1** Demonstrar:

1) O teorema 2.1.1

2) O teorema 2.1.2

3) Refazer a demonstração do Teorema da Correção com todos os detalhes.

4) $\models A \rightarrow (B \rightarrow A)$

5) $\models (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C))$

6) $\models A \vee (A \rightarrow B)$

7) $\models ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$

8) $\models (A \wedge B) \rightarrow A$

9) $\models A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$

10) $\models A \rightarrow (A \vee B)$

11) $\models (A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C))$

12) $\models (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$

13) $\models A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$

14) $\models A \vee \neg A$

15) $\models A \leftrightarrow \neg\neg A$

16) $\models \neg(A \wedge \neg A)$

Se o leitor resolveu os exercícios de 4 a 16 por qualquer método que não seja o uso direto da definição de verdade, deve fazê-lo por este último processo.

**Exercício 2**: Provar, pela definição de verdade, que:

1) $\models \forall x A(x) \rightarrow A(t)$

2) $\models A(t) \rightarrow \exists x A(x)$

3) $\models \forall x A(x) \leftrightarrow A(\varepsilon x \neg A(x))$

4) $\models \exists x A(x) \leftrightarrow A(\varepsilon x A(x))$

5) $\models \varepsilon x A(x) = \varepsilon y A(y)$

6) $\models \forall x (A(x) \leftrightarrow B(x)) \rightarrow \varepsilon x A(x) = \varepsilon x B(x)$

7) $\models \exists x A(x) \leftrightarrow \forall x (x = \varepsilon x A(x) \rightarrow A(x))$

8) $\models \exists x A(x) \leftrightarrow \exists x (x = \varepsilon x A(x) \wedge A(x))$

9) $\models \forall x A(x) \leftrightarrow \exists x (x = \varepsilon x \neg A(x) \wedge A(x))$

10) $\models x = x$
11) $\models \forall x\,(x = x)$
12) $\models \exists x(x = x)$
13) $\models x = y \rightarrow y = x$
14) $\models (x = y \wedge y = z) \rightarrow x = z$
15) $\{A, A \rightarrow B\} \models B$
16) Se $\Gamma \models A(x) \rightarrow B$, então $\Gamma \models \exists x A(x) \rightarrow B$
17) Se $\Gamma \models A \rightarrow B(x)$, então $\Gamma \models A \rightarrow \forall x A(x)$
18) $\{A \vee B, \neg A\} \models B$

No exercício anterior não tornamos explícitas as restrições. (Existem restrições? )

Neste ponto parece natural que se indague se a recíproca do Teorema da Correção, que se denomina *Teorema da Completude*, também vale. A resposta é afirmativa, e sua demonstração deve-se essencialmente a K. Gödel. A próxima secção deste capítulo é dedicada à demonstração dessa proposição.

## 2.2 A Completude da Lógica Elementar

Para começar, apresentaremos algumas definições.

**Definição 2.2.1** (*Conjunto Inconsistente*)
Um conjunto de fórmulas $\Gamma$ diz-se *inconsistente* se existe uma fórmula A tal que $\Gamma \vdash A$ e $\Gamma \vdash \neg A$. Se $\Gamma$ não for inconsistente, ele se chama *consistente*.

**Definição 2.2.2** – (*Conjunto Trivial*)
$\Gamma$ diz-se *trivial* se $\Gamma \vdash A$ para qualquer fórmula A. Se $\Gamma$ não for trivial, $\Gamma$ chama-se *não-trivial*.

**Teorema 2.2.1** – $\Gamma$ é inconsistente se, e somente se, for trivial.

**Demonstração** – Se $\Gamma$ for trivial, ele é obviamente inconsistente. Se $\Gamma$ for inconsistente, então $\Gamma \vdash A$ e $\Gamma \vdash \neg A$ para alguma fórmula A. Mas, por outro lado, como $\Gamma \vdash A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$, para qualquer fórmula B, segue-se que $\Gamma$ é trivial.

**Definição 2.2.3** – (*Conjunto Consistente Maximal*)
$\Gamma$ denomina-se consistente maximal se $\Gamma$ for consistente e não estiver contido propriamente em nenhum outro conjunto consistente (em

outras palavras, Γ é consistente e não está contido em nenhum outro conjunto consistente maior do que ele).

**Definição 2.2.4** – (*Modelo*)

Sejam $\mathcal{A}$ uma estrutura, $i$ uma interpretação de L em $\mathcal{A}$, e $f$ uma função auxiliar de L em $\mathcal{A}$. Denotaremos por Γ um conjunto qualquer de fórmulas. Dizemos que $\mathcal{A}$ é um modelo de Γ, segundo $i$ e $f$, ou que $i$ e $f$ constituem um modelo de Γ, se $v_i^f(A) = 1$ para toda fórmula A em Γ. (Muitas vezes, por abuso de linguagem, afirmamos que $\mathcal{A}$ é modelo de Γ, sem especificarmos $i$ e $f$.)

**Teorema 2.2.2** – $\Gamma \models F$ se, e somente se, todo modelo de Γ for modelo também de $\{F\}$ (algumas vezes, para simplificar, diremos modelo de F e não modelo de $\{F\}$).

**Demonstração** – Conseqüência imediata das definições dadas.

**Definição 2.2.5** – (*Satisfação*)

A estrutura $\mathcal{A}$ ***satisfaz*** o conjunto Γ de fórmulas se for modelo do mesmo. Em particular, $\mathcal{A}$ satisfaz F se for modelo de F.

**Teorema 2.2.3** – (*da Compacidade*) – Um conjunto Γ de fórmulas é consistente se, e somente se, todos os seus subconjuntos finitos forem consistentes.

**Demonstração** – Se Γ for consistente, é claro que qualquer de suas partes finitas deve ser consistente.

Por outro lado, admitamos que todo subconjunto finito de Γ é consistente. Se isto acontecer, Γ não pode ser inconsistente. Com efeito, se de Γ for possível deduzir uma fórmula A e também sua negação $\neg A$, dele se deduz a fórmula $A \wedge \neg A$, e isto empregando-se um conjunto finito de fórmulas de Γ (qualquer dedução só utiliza um conjunto finito de hipóteses em sua árvore); logo, este conjunto seria inconsistente, o que é absurdo.

**Definição 2.2.6** – (*Conjunto de Henkin*).

Γ é um conjunto de Henkin se forem satisfeitas as duas seguintes condições:

I) Para toda fórmula A(x) tal que $\Gamma \vdash \exists x A(x)$,
$\Gamma \vdash \exists x(x = \varepsilon x A(x) \wedge A(x))$;

II) Para toda fórmula B(x) tal que $\Gamma \vdash \forall x B(x)$, $\Gamma \vdash \exists x(x = \varepsilon \cdot\cdot \neg A(x) \wedge A(x))$.

**Teorema 2.2.4** – Todo conjunto de fórmulas é de Henkin.

**Demonstração** – Facilmente se prova que $\vdash \exists x A(x) \leftrightarrow \exists x(x = \varepsilon x A(x) \wedge A(x))$ e $\vdash \forall x B(x) \leftrightarrow \exists x(x = \varepsilon x b(x) \wedge B(x))$.

Logo, se $\Gamma \vdash \exists x A(x)$, advém que $\Gamma \vdash \exists x(x = \varepsilon x A(x) \wedge A(x))$; e se $\Gamma \vdash \forall x B(x)$, decorre que $\Gamma \vdash \exists x(x = \varepsilon x \neg B(x) \wedge B(x))$.

**Teorema 2.2.5** – Todo conjunto consistente de fórmulas está contido em um conjunto maximal consistente.

**Demonstração** – Assumiremos que L tem um conjunto enumerável de símbolos primitivos, ou seja, que existem tantos símbolos primitivos quantos há números naturais. Nesta hipótese, as fórmulas de L podem ser enumeradas assim:

$A_0, A_1, A_2, \ldots$

Designemos por $\Gamma$ um conjunto consistente qualquer e formemos a seqüência de conjuntos de fórmulas $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ da seguinte maneira:

$\Gamma_0$ é $\Gamma$.

$\Gamma_1$ é $\Gamma_0 \cup \{A_0\}$, se este conjunto for consistente e é $\Gamma_0$ em caso contrário;

$\Gamma_2$ é $\Gamma_1 \cup \{A_1\}$ se este conjunto for consistente e é $\Gamma_1$ em caso contrário:

Etc., etc.

Fica definida, assim, a seqüência de conjuntos $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$, onde $\Gamma_0 = \Gamma$, cada um deles está contido nos seguintes e todos são consistentes.

Seja $\bar{\Gamma} = \cup\Gamma_n$, isto é, a união de todos os conjuntos $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$, o conjunto que contém todas as fórmulas de $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$, e só elas.

Evidentemente, $\Gamma$ está contido em $\bar{\Gamma}$.

Além disso, $\bar{\Gamma}$ é consistente, pois se isto não se der, é possível derivar uma fórmula do tipo $F \wedge \neg F$ de um subconjunto K finito de $\bar{\Gamma}$; K sendo finito, estará contido em algum $\Gamma_n$, para n suficientemente grande; ora, neste caso, $\Gamma_n$ não seria consistente, o que é absurdo.

Finalmente provaremos que $\bar{\Gamma}$ é maximal. Com efeito, admitamos que exista uma fórmula G que não pertença a $\bar{\Gamma}$, mas que $\bar{\Gamma} \cup \{G\}$ seja consistente. G, então, é uma das fórmulas da seqüência $A_0, A_1, A_2, \ldots$; seja G a fórmula $A_k$. Assim, como $A_k$ não está em N, isto significa que $A_k$ juntado a $\Gamma_k$ gera um conjunto inconsistente, e, *ipso fato*, $\bar{\Gamma}$ seria inconsistente, contrariamente ao que já se demonstrou.

Portanto, fica provado o teorema. (O teorema vale, também, no caso de L não ser enumerável; todavia, a demonstração é mais complicada, requerendo outro método de prova).

**Definição 2.2.7** (*Γ-satisfação*) – Diz-se que o termo t Γ-satisfaz a fórmula A(x) se, e só se, $\Gamma \vdash \exists x(x = t \wedge A(x))$. Se t não causar confusão de variáveis quando substituir x em A(x), esta condição equivale a $\Gamma \vdash A(t)$.

Escreveremos $A \in \Gamma$ para exprimir o fato de que A pertence a Γ e $A \notin \Gamma$ para expressar que A não pertence a Γ. No teorema abaixo, o símbolo metalingüístico ⇔ é empregado para abreviar *se e somente se.*

**Teorema 2.2.6** – Seja Γ um conjunto maximal de fórmulas. Tem-se:

1) $\Gamma \vdash A \Leftrightarrow A \in \Gamma$;
2) Para toda fórmula A, $A \in \Gamma$ ou $\neg A \in \Gamma$;
3) $A \rightarrow B \in \Gamma \Leftrightarrow A \notin \Gamma$ ou $B \in \Gamma$;
4) $A \wedge B \in \Gamma \Leftrightarrow A \in \Gamma$ e $B \in \Gamma$;
5) $A \vee B \in \Gamma \Leftrightarrow A \in B$ ou $B \in \Gamma$;
6) $\forall x A(x) \in \Gamma \Leftrightarrow$ Todo termo t Γ-satisfaz A(x);
7) $\exists x A(x) \in \Gamma \Leftrightarrow$ Algum termo t Γ-satisfaz A(x);
8) Se $A \in \Gamma$ e $A \rightarrow B \in \Gamma$, então $B \in \Gamma$;
9) $\forall x(A(x) \leftrightarrow B(x)) \in \Gamma$ implica que $\varepsilon x A(x) = \varepsilon x B(x) \in \Gamma$.

**Demonstração** – Provaremos quatro das afirmações do teorema. As outras ficam como exercício para o leitor.

1) Se $\Gamma \vdash A$ e $A \notin \Gamma$, então Γ estaria contido propriamente no conjunto consistente $\Gamma \cup \{A\}$. Se $A \in \Gamma$, obviamente $\Gamma \vdash A$.

2) Suponhamos que $A \notin \Gamma$. Logo $\Gamma \cup \{A\}$ é inconsistente e, por isso, $\Gamma \vdash \neg A$; daí, $\neg A \in \Gamma$. Analogamente se prova que se $\neg A \notin \Gamma$, $A \in \Gamma$.

3) $A \rightarrow B \in \Gamma$ e $A \in \Gamma$ acarreta que $B \in \Gamma$.
$A \rightarrow B \in \Gamma$ e $B \notin \Gamma$ implica que $A \notin \Gamma$.
Logo, se $A \rightarrow B \in \Gamma$, $A \notin \Gamma$ ou $B \in \Gamma$.

Se $A \notin \Gamma$, então $\neg A \in \Gamma$, e como $\vdash \neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$, advém que $A \rightarrow B \in \Gamma$. Se $B \in \Gamma$, como $\vdash B \rightarrow (A \rightarrow B)$, tem-se que $A \rightarrow B \in \Gamma$.

4) Se $\Gamma \vdash \forall x A(x)$, pelo Teorema 2.2.4 conclui-se que existe um termo $\varepsilon x \neg A(x)$ que Γ-satisfaz A(x), e reciprocamente.

**Teorema 2.2.7** – Todo conjunto consistente de fórmulas possui modelo.

**Demonstração** (esboço) – Basta provar que se um conjunto consistente for maximal, então ele tem modelo. Com efeito, se Δ for um conjunto

consistente, ele está contido em um conjunto consistente maximal $\Delta$ pelo Teorema 2.2.5. Se $\overline{\Delta}$ tiver modelo, $\Delta$ também terá, como é patente.

Seja $\Gamma$ um conjunto consistente maximal, e vamos provar que $\Gamma$ tem modelo.

Se $t_1$ e $t_2$ forem termos, diremos que $t_1$ é $\Gamma$-equivalente a $t_2$, e escreveremos $t_1 \sim_\Gamma t_2$ ou, simplesmente, $t_1 \sim t_2$, se $\Gamma \vdash t_1 = t_2$.

É fácil demonstrar que a relação $\sim$ é reflexiva ($t_1 \sim t_1$), simétrica ($t_1 \sim t_2$ implica $t_2 \sim t_1$) e transitiva ($t_1 \sim t_2$ e $t_2 \sim t_3$ acarreta $t_1 \sim t_3$). Então, $\sim$ é o que se denomina uma relação de equivalência, e o conjunto dos termos fica decomposto em classes disjuntas (duas a duas sem elementos comuns) e tais que qualquer termo pertence a uma delas, que se chamam classes de equivalência. A classe à qual o termo t pertence será denotado por $\tilde{t}$. Além disso, pela lei de Leibniz da igualdade, se $t_1 \sim t_2$, então $\Gamma \vdash A(t_1) \leftrightarrow A(t_2)$, sempre que não houver confusão de variáveis.

O modelo que vamos construir tem como universo o conjunto das classes de equivalência precedentes. Dado um símbolo de predicado P de grau n, a ele corresponderá a relação $\tilde{P}$ entre classes de equivalência, definida assim

$$\tilde{P}\tilde{t}_1 \tilde{t}_2 \ldots \tilde{t}_n \text{ se, e só se, } \Gamma \vdash P t_1 t_2 \ldots t_n$$

Pelas considerações acima, fica claro que $\tilde{P}$ está bem definida. Além do mais, por esse processo de definição, o símbolo de igualdade corresponde à relação de igualdade entre classes de equivalência.

Para a estrutura de nosso modelo ficar completa, devemos definir a função de escolha **e**. Seja, pois, K um conjunto de classes de equivalência. Se K for tal que existe uma fórmula A(x), com uma única variável livre x, e se tem que $\tilde{t} \in K$ se, e somente se, $\Gamma \vdash \exists x(x = t \wedge A(x))$, tomamos como valor de **e** em K a classe $\widetilde{\varepsilon x A(x)}$; se não existir uma fórmula nessas condições, tomamos como valor de **e** em K um elemento qualquer de K.

Definimos uma interpretação **i** (ver Definição 2.1.1) associando a cada símbolo de predicado a relação correspondente, já referida, e a cada constante c a classe $\tilde{c}$.

Finalmente, introduzimos uma função auxiliar **f** (ver Definição 2.1.2), que associa a cada variável x a classe $\tilde{x}$.

Fica construída, assim, a estrutura *A* que vamos demonstrar ser modelo de $\Gamma$ segundo **i** e **f**. (*A*, por assim dizer, foi construída com material sintático, isto é, com os termos de L). Para tanto, seguindo as cláusulas da Definição 2.1.3, mostraremos que F é verdadeira no modelo se, e só se, $\Gamma \vdash F$, ou, o que dá no mesmo, se, e só se, $F \in \Gamma$.

Raciocinemos por indução matemática sobre o número de ocorrências de símbolos em F, sendo que qualquer termo conta como a ocorrência de um só símbolo.

Se F for da forma $Pt_1t_2 \ldots t_n$, da cláusula 2 da Definição 2.1.3, então, pela própria construção de $A$, $v_i^f(F) = 1$ se, e somente se, $\Gamma \vdash F$.

Trataremos, agora, apenas de mais duas cláusulas da Definição 2.1.3 (escreveremos $\Gamma \nvdash G$ para expressar que G não é conseqüência sintática de $\Gamma$);

Cláusula 3, parte 1: Se F for da forma $A \to B$, $v_i^f(F) = 1$ se, e somente se, $v_i^f(A) = 0$ ou $v_i^f(B) = 1$, o que equivale, por hipótese de indução, a $\Gamma \nvdash A$ ou $\Gamma \vdash B$, o que, pelo Teorema 2.2.5, equivale a $\Gamma \vdash A \to B$. As outras partes são tratadas de modo semelhante.

Cláusula 5, parte 1: F é $\forall x A(x)$. Assim, $v_i^f(F) = v_i^f(\forall x A(x)) = 1$ equivale a $v_i^{f'}(A(x)) = 1$, nas condições da Definição 2.1.3, o que equivale a se afirmar que qualquer termo t é tal que $v_i^f(A'(t)) = 1$, para alguma fórmula A'(x) congruente a A(x), ou seja, que $\Gamma \vdash A'(t)$; mas isto quer dizer, por sua vez, que para qualquer termo t, $\Gamma \vdash \exists x(x = t \wedge A(x))$, ou seja, que qualquer termo t $\Gamma$-satisfaz A(x). E isto equivale a $\Gamma \vdash \forall x A(x)$, pelo Teorema 2.2.5. A segunda parte da cláusula é manipulada de maneira similar.

**Teorema 2.2.8** *(da Completude)* – Se $\Gamma \models F$, então $\Gamma \vdash F$.

**Demonstração** – Admitamos que $\Gamma \models F$ mas que $\Gamma \nvdash F$. Daí se conclui que $\Gamma \cup \{\neg F\}$ é consistente, pois, em caso contrário, como é fácil de se ver, $\Gamma$ acarretaria F, isto é, $\Gamma \vdash F$.

Mas se $\Gamma \cup \{\neg F\}$ é consistente, ele tem modelo, pelo teorema precedente. Seja $A$ um modelo de $\Gamma \cup \{\neg F\}$. $A$ é modelo de $\Gamma$, pois é modelo de $\Gamma \cup \{\neg F\}$; porém, como $\Gamma \models F$, $A$ deve ser também modelo de F. Isto é absurdo, pois $A$ é modelo de $\neg F$ por ser de $\Gamma \cup \{\neg F\}$. ($A$ não pode ser modelo de F e de $\neg F$ ao mesmo tempo, pela Definição 2.1.3).

Logo, $\Gamma \vdash F$, como queríamos demonstrar.

**Corolário 1** – $\Gamma \models F$ se, e só se, $\Gamma \vdash F$.

**Demonstração** – Conseqüência dos teoremas da Correção e da Completude.

**Corolário 2** – $\models F$ se, e somente se, $\vdash F$.

Facilmente se demonstra o seguinte resultado:

**Teorema 2.2.9** – Um conjunto $\Gamma$ de fórmulas tem modelo se, e somente se, for consistente.

## 2.3 As Teorias Elementares

Uma das principais aplicações da lógica elementar é na sistematização de teorias.

Uma teoria $\widetilde{T}$ caracteriza-se pelos seus princípios básicos, que se chamam postulados ou axiomas. Se sua linguagem é L, $\widetilde{T}$ chama-se teoria elementar.

Os teoremas de $\widetilde{T}$ são as fórmulas que podem ser deduzidas quando se tomam seus axiomas como suposições. Em particular, os axiomas de $\widetilde{T}$ são também teoremas de $\widetilde{T}$.

Tendo-se em vista que $\widetilde{T}$ é caracterizada pelo conjunto $\Delta$ de seus axiomas, facilmente se estendem a maioria dos conceitos anteriores para teorias. Deste modo se definem as noções de teoria consistente, de teoria inconsistente, de modelo de uma teoria, etc.

Também muitas das inferências comuns podem ser tratadas por meio da lógica elementar ou, como se costuma afirmar, podem ser formalizadas nessa lógica

A inferência

$$\frac{A_1 \quad A_2 \ldots A_n}{B}$$

desde que tenha sido formalizada em L, é logicamente válida quando $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \vdash B$. Para que a inferência seja logicamente válida, portanto, é preciso que das premissas se possa deduzir a conclusão. Todavia, asseverar que $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \vdash B$ equivale a afirmar que $\vdash (A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow B$. Pode-se dizer, por conseguinte, que a inferência é logicamente válida desde que a conjunção das premissas implique logicamente a conclusão.

Em princípio, todas as teorias da matemática tradicional são suscetíveis de ser formalizadas com os recursos da lógica elementar; analogamente, toda inferência matemática tradicional pode ser codificada de acordo com a lógica elementar. Estes fatos evidenciam a grande relevância dessa lógica.

Na realidade, **estudamos a lógica elementar** com o operador $\varepsilon$, embora esta lógica, em sentido estrito, não envolva tal símbolo. A lógica elementar sem este operador é também extremamente potente, e tudo o que afirmamos nesta secção a ela se aplica. No entanto, a presença do símbolo de

Hilbert em L simplifica inúmeras questões, e nos familiariza com um operador importante. exemplo de categoria de operadores que formam termos ligando variáveis de fórmulas, cuja teoria, hoje, é de enorme relevância.

## LEITURAS COMPLEMENTARES

Introduções Elementares à Lógica:

COPI, I.M. *Introduction to Logic*. Macmillan, 1982.
QUINE, W.v.O. *Methods of Logic*. Holt, 1950.

Boas Introduções à Lógica:

KLEENE, S.C. *Introduction to Metamathematics*. van Nostrand, 1952.
MENDELSON, E. *Introduction to Mathematical Logic*. van Nostrand, 1979.
SCHOENFIELD, J.R. *Mathematical Logic*. Addison-Wesley, 1967.

História da Lógica.

KNEALE, M. e W. *O Desenvolvimento da Lógica*. Lisboa, Calouste Gulbenkian, 1980.
BOCHENSKI, I.M. *Historia de la Logica Formal*. Madrid, Gredos, 1966.

Trabalhos em que o símbolo $\varepsilon$ é tratado e, em geral, a teoria dos operadores que formam termos ligando variáveis de fórmulas:

DRUCK, I.F. e da COSTA, N.C.A. "Sur les 'vbtos' selon M. Hatcher". *C.R. Acad. Sc. Paris*, **281**, 1975, 741-743.
da COSTA, N.C.A. "A model-theoretical approach to variable binding term operators". *Mathematical Logic in Latin America*. Ed. ARRUDA, A.I, CHUAQUI, R. e da COSTA, N.C.A., North-Holland, 1980, 133-162.
da COSTA, N.C.A. e MORTENSEN, C. "Notes in the theory of variable binding term operators". *History and Philosophy of Logic* **4**, 1983, 63-72.
HATCHER, W.S. *The Logical Foundations of Mathematics*. Pergamon, 1982.
LEISERING, A.C. *Mathematical Logic and Hilbert's $\varepsilon$-Symbol*. MacDonald, 1969.

Algumas obras que versam sobre filosofia da lógica e lógicas não-clássicas:

da COSTA, N. C. A. *Ensaio sobre os Fundamentos da Lógica*. Hucitec, 1979.

HAACK, S. *Deviant Logic*. Cambridge University Press, 1977.
HAACK, S. *Philosophy of Logics*. Cambridge University Press, 1978.
RESCHER, N. *Topics in Philosophical Logic*, Dordrecht, 1968.

Obras disponíveis em português, além das já citadas nos ítens anteriores:

BARKER, S. *Filosofia da Matemática*. Rio, Zahar, 1976.
BLANCHÉ, R. *A Axiomática*. Lisboa, Presença, 1978.
BLANCHÉ, R. *História da Lógica de Aristóteles a Bertrand Russell*. Lisboa, Edições 70, 1985.
da COSTA, N. C. A. *Introdução aos Fundamentos da Matemática*. São Paulo, Hucitec, 1977.
FREGE, G. *Os Pensadores*, vol. XXXVI. São Paulo, Abril, 1974.
FREGE, G. *Lógica e Filosofia da Linguagem*. São Paulo, Cultrix/EDUSP, 1978.
HENKIN, L. "Verdade e Demonstrabilidade" e "Completude", em MORGENBESSER, S. *Filosofia da Ciência*. São Paulo, Cultrix, 1967.
KLEENE, S. C. "Computabilidade", em MORGENBESSER, S., op. cit.
KÖRNER, S. *Filosofia da Matemática*. Rio, Zahar, 1985.
RUSSELL, B. *Os Pensadores*. São Paulo, Abril, 1978.
RUSSELL, B. *Introdução à Filosofia Matemática*. Rio, Zahar, 1981.
SALMON, W. *Lógica*. Rio, Zahar, 1969.
SCHOLZ, H. "A Axiomática dos Antigos". *Cadernos de História e Filosofia da Ciência* **1**, 1980.

Nova Série
# Livro-Texto

**A Nova Série Livro-Texto, da Editora da Universidade, traz de volta a idéia de que os professores não dispõem, muitas vezes, de obras condizentes com suas necessidades específicas de sala de aula. À ausência de bibliografia especializada, soma-se a pequena quantidade de textos específicos para uso pedagógico. O objetivo desta série é preencher um vazio editorial, enriquecendo o processo de aprendizagem com livros qua atendam as carências das múltiplas áreas de conhecimento.**

---

**BASIC para jovens: introdução à informática**
Magda Bercht e Newton Braga Rosa

Este livro está escrito de forma coloquial, direta e simples, visando facilitar o auto-aprendizado da linguagem BASIC pelos não-iniciados.
*BASIC para jovens (introdução à informática)* foi projetado para ser usado junto com um microcomputador.
Conforme a experiência dos autores, o estudante pode progredir no seu próprio ritmo, dispensando a presença constante do professor; em 12 horas de trabalho, em média, vencerá todo o conteúdo, se sentirá seguro para elaborar pequenos programas e motivado para estudos mais avançados.

**Dance aprendendo, aprenda dançando**
Morgada Cunha

A dança criativa possui características, valores e finalidades eminentemente educativas, por isso ela deveria integrar currículos escolares desde a pré-escola até a universidade. Seus conteúdos típicos são perfeitamente adaptáveis a qualquer nível de ensino, o que viria a complementar as atividades ginásticas, lúdicas, esportivas e recreativas, que via de regra integram a disciplina de Educação Física ministrada em nossas escolas.

---

**PRÓXIMO LANÇAMENTO:**

**Manual LOGO**

Lucila Maria Costa Santarosa (coord.), Maria Eunice Garrido Barbieri, Rosângela Kisiolar Machado e Renato Albano Petersen Filho

Trabalho desenvolvido pela equipe de pesquisadores, professores e monitores do Projeto EDUCOM, da Faculdade de Educação da UFRGS. Tem como propósito suprir a falta de um manual que facilite a aprendizagem pela criança da linguagem LOGO.

---